TURING 图灵数学·统计学丛书



Financial Calculus

An Introduction to Derivative Pricing

金融数学

衍生产品定价引论

[英] Martin Baxter
Andrew Rennie 著

叶中行 王桂兰 林建忠 译


人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

金融数学 衍生产品定价引论

Financial Calculus

An Introduction to Derivative Pricing

Baxter和Rennie极其出色地将困难而且不那么直观的概念讲述得通俗易懂，建议那些对现有的定量化金融思维模式有兴趣的读者，如果你还不知道“为什么不是鞅就不可交易”，那就立即购买这本书，一页一页地阅读，或许还要多读几遍。

—泰晤士高教增刊

睿智、优雅、紧凑，为我们带来了一股清新的空气。这是一本优秀的关于衍生品定价理论的入门之书，应用了现代的概率方法，开金融数学书籍的一代风气之先。

—Risk杂志

总之，Baxter和Rennie清楚地解释了鞅方法的目的，对更现代的数学方法也作了非常清晰的介绍，……他们对这一前沿理论的表述是如此地出色和清晰。强烈建议读者购买本书，仅仅第三章就物有所值。

—英国精算学报

本书揭示了隐藏在衍生证券定价、结构和套期保值背后的数学。作者以其深厚的数学功底和长期在商学院执教的经验，精选素材，巧妙地将衍生产品定价的严格数学模型和推导加以简化，并与市场的实际相结合，成就了这本通俗易懂又不失科学性的优秀的金融数学教材。

本书原版自出版以来重印已经超过了11次，非常畅销。适用于商学院和数学系本科生作为金融数学或金融工程课程的教材，也是金融人员的必备参考书。

Martin Baxter 供职于野村证券。曾连续4年任剑桥大学彭布罗克学院的院士，并曾访问不列颠哥伦比亚大学1年，多次在欧洲和北美的学术和金融机构作特邀报告。
Andrew Rennie 毕业于剑桥大学。现为美林欧洲公司的首席债券分析师。

本书相关信息请访问：图灵网站 http://www.turingbook.com
读者/作者热线：（010）88593802
反馈/投稿/推荐信箱：contact@turingbook.com

上架建议 数学/金融数学

ISBN 7-115-14204-1



ISBN7-115-14204-1/TP·5091
定价：29.00 元

人民邮电出版社网址 www.ptpress.com.cn

TURING 图灵数学·统计学丛书

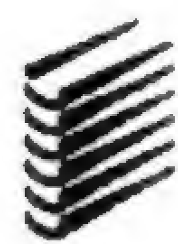
Financial Calculus

An Introduction to Derivative Pricing

金融数学

衍生产品定价引论

[英] Martin Baxter
Andrew Rennie 著
叶中行 王桂兰 林建忠 译



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

图书在版编目（CIP）数据

金融数学：衍生产品定价引论 /（英）巴克斯特，（英）伦尼著；叶中行，王桂兰，林建忠译．—北京：人民邮电出版社，2006.1
（图灵数学·统计学丛书）

ISBN 7-115-14204-1

Ⅰ．金…　Ⅱ．①巴…②伦…③叶…④王…⑤林…　Ⅲ．金融—经济数学　Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 144043 号

内容提要

金融数学的核心内容之一就是衍生产品的定价．本书涉足隐藏在衍生证券定价、结构和套期保值背后的数学，严格而又通俗．作者用易于市场实践者理解的方式介绍了新的诸如鞅、测度变换等概念和 Heath-Jarrow-Morton 模型．从借助于二叉树的离散时间套期保值开始，进一步推广到连续时间股票模型（包括 Black-Scholes 模型）．本书突出了可实践性，包括了股票、货币和利率市场的诸多例子，并提供了基于实际数据绘制的图形．附录中提供了关于概率和金融概念的术语表．

本书作为金融数学的基础教材，适用于相关专业的本科生和研究生课程．也可供金融行业的市场实践者、定量分析师和衍生品交易者等相关领域专业人士参考．

图灵数学·统计学丛书

金融数学——衍生产品定价引论

◆ 著　[英] Martin Baxter　Andrew Rennie
译　叶中行　王桂兰　林建忠
责任编辑　王丽萍

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京顺义振华印刷厂印刷
新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本：800×1000　1/16
印张：12
字数：250 千字　2006 年 1 月第 1 版
印数：1－4 000 册　2006 年 1 月北京第 1 次印刷

著作权合同登记号　图字：01-2005-6095 号

ISBN 7-115-14204-1/TP·5091

定价：29.00 元

读者服务热线：(010)88593801　印装质量热线：(010)67129223

译 者 简 介

叶中行：美国 Cornell 大学博士．现任上海交通大学理学院副院长，现代金融研究中心副主任，教授，博士生导师．其研究领域包括应用概率统计、金融数学、信息理论和信息处理、智能计算等．出版专著和教材 5 本，在国际和国内重要学术期刊、国际学术会议发表了数十篇论文．

王桂兰：1996 年在中科院应用数学研究所获得理学博士学位，现为上海交通大学数学系副教授．研究方向为金融数学．发表金融数学方面的论文 8 篇．

林建忠：1994 年在上海交通大学应用数学系获硕士学位，2004 年在香港中文大学统计系获博士学位，现为上海交通大学数学系副教授．主要研究兴趣为数理金融和金融统计．已发表学术论文 8 篇，出版教材 1 本．

译 者 序

随着我国改革开放的深入，金融业走向世界，越来越多地参与全球的金融衍生品交易，国内银行业、证券业和期货业也有越来越多的衍生品面世．这些行业对熟悉金融衍生品的人才的需求日益旺盛．为适应这种需求，国内越来越多的高校已经或将要增设金融数学和金融工程的新专业或专业方向，包括从本科、硕士到博士的不同层次，从而迫切需要建立相应的课程体系和编写相应的适用教材．

金融数学和金融工程的核心内容之一就是衍生产品的定价．但是对于衍生产品定价的严格数学模型和推导需要高深的随机分析的知识，这对于初学者显然是一种过于苛刻的要求．如何在严格的数学推导体现的科学性与通俗易懂的直观性之间取折衷，使得不具备太多数学和金融知识的读者能迅速进入这个领域，掌握金融衍生品定价的本质，本书是一个很好的尝试．本书的作者既有相当深厚的数学功底，又长期在商学院执教，在编写此教材时精选素材，将严格的数学推导加以简化，并与市场的实际相结合．因此本书不失为一本通俗易懂又不失科学性的教材，可作为商学院和数学系本科生的金融数学或金融工程课程的教材，也可作为从事金融工程的实务工作者的参考书．因此我们将它翻译出来以飨国内的读者．

本书由上海交通大学数学系和现代金融研究中心的金融数学和金融工程研究组翻译，叶中行负责协调全书的翻译工作并翻译了第 1 章和第 3 章的后 3 节，还和俞辰佳共同翻译了第 2 章，白云芬翻译了第 3 章的前 5 节，陈文才和王桂兰分别翻译了第 4 章和第 5 章，林建忠翻译了第 6 章和附录，叶中行核对并润色了全书的译稿．译者感谢人民邮电出版社图灵公司的指导和支持，使本书的翻译出版成为现实．

译者
2005 年 9 月于上海

前　言

金融数学的工作可以是严格的，也可以是通俗易懂的．但是正如约翰逊（Johnson）博士指出的，严格的东西未必是通俗易懂的，而通俗易懂的东西未必是严格的．

但是这两方面都是需要的．金融数学并不容易，但很多市场的实践操作是依据对实际情况的直觉的．对有经验的实践者，在对已有的合约进行估价时，直觉就够用了，但对创新产品的定价直觉往往是不够的．初学者、管理者和法则制定者在面对大量文献时，因为得不到基本准则的清晰解释而会手足无措．这种凭直觉的实践似乎更适合于行业的发展初期，而不适合于衍生产品交易已形成 15 万亿美元规模的成熟市场．

在学术界，人们经常花很多精力对错误的问题寻求严格的解答．如果孤立于市场，其努力主要是出于自身的目的去寻求解析的解答，而不考虑实践者关心的问题，特别会低估套期保值其价格和本身的重要性．即便仅仅是对来自工业界而不是学术的问题方面已经有了一些最好的解答，学者们也需要关心这些金融的问题．

对本书章节的导引

第 1 章是一个简单的引言，特别是对初学者，表明对某些东西，它的期望价值并不能很好地指导定价，需要质疑这种观点，并用套利定价方法取而代之．

第 2 章发展了套期保值的观点，并通过离散时间二叉树模型的套利分析来定价．在这个简单的框架下介绍了一些关键的概率的概念，如条件期望、鞅、测度变换和表示定理，并辅以具体的例子．

第 3 章在连续时间情形下讨论了与前一章相同的问题，引出了 Brown 运动和 Itô 积分，并用于导出 Black-Scholes 法则．

第 4 章讨论了广泛的一类金融产品，如分红的证券、支付现金和利息的债券，将 Black-Scholes方法进行适当修正以适合这些产品的定价．对区分可交易和不可交易量的一般的讨论导致了对风险的市场价格的定义，同时也指出对这个名称不必太在意，后面有一节专门讨论货币产品并给出了一系列例子．

第 5 章是关于利率市场．从本质上讲，债券市场更像股票市场．但这个市场的丰富内涵使之不光是像Black-Scholes模型的一个特例，因此我们在第 3 章建立的，一般连续时间框架下结合短期利率与 HJM 模型来讨论市场模型．有一节详细讨论了很多可能的利率合约，包括互换、利率上/下限和互换期权．这一节反映了必须以一种通俗易懂的形式介绍给读者深度的金融和技术知识，其目的是揭示所有方法都可以融入其内的市场的一个基本事实．

第 6 章给出了更一般模型下的一些技术性的结论，包括对多种股票 n-因子模型、计价单位、外汇利率模型等．最后给出了等价鞅测度的存在性、可定价性及套期保值的关系．

附录中包括了简短的参考文献、数量不多的习题的完整解答、技术名词词汇一览表和索引.

如何阅读本书

可以按顺序像阅读小说那样阅读本书，也可以随机地选择各自独立的完整章节，偶而有些问题需要读者运用本书所讲授的技巧，但无碍于往下的阅读.

不要求读者在阅读本书时需具备特别的预备知识，只需了解某些经典的微分计算和数学符号概念，词汇表中包括了基本的概率定义. 更熟练的读者可以随着本书内容的展开发现更多的技术性的旁注.

致谢

我要感谢剑桥大学出版社的戴维·特兰荷（David Tranah），他彬彬有礼，从不提我们多次拖延交稿的事，当然还要感谢他更具价值的帮助；感谢在伦敦、纽约等地用过我们讲义的读者，他们忍受了比目前这个最终版本差得多的写作风格；特别要感谢洛恩·怀特威（Lorne Whiteway）的帮助和鼓励.

Martin Baxter
Andrew Rennie
1996 年 6 月

一个赌马的比喻

庄家设局在一个2匹马的比赛中赌博，如果选择有技巧性的方法，他要研究马跑不同距离的表现，同时要考虑诸如马的训练、饮食和骑师的选择等诸因素．最后他正确地计算出一匹马有25%的概率会赢，另一匹马赢的概率为75%，据此他能对第一匹马按押1赔3的赔率赔付，而对第二匹马按押3赔1的赔率赔付．

设定这样的赔率一定程度反映了大众的心理，比如对第一匹马下注5000美元，对第二匹马下注10 000美元．如果第二匹马赢，他可以获利1667美元，但如果第一匹马赢，他则会损失5000美元，因此他获利的期望值是25%×(−\$5000)+75%×(\$1667)=\$0，或者说正好打平手．从长远来看，在一系列类似但独立的比赛中，平均的法则会使赌马者打成平手．除非比赛次数很多，否则可能会面临很大的损失．

然而假设他按照赌金的比例2:1而不是3:1下注，即对第一匹马按押2赔1的赔率赔付，而对第二匹马按押1赔2的赔率赔付，则无论哪匹马赢，他都会打成平手．结果与马输赢无关．

在实践中，庄家会按照超过100%的胜率来出售，同时降低赔率以便从中获利（见下表）．然而会出现同样的问题，应用准确的概率从长远来看可以获利，但短期内可能会有损失．庄家如果想赚取稳定的收益，建议他最好设想赛马的概率与准确的概率是不同．如果是这样的话，他会处于对赛马的结果并不感兴趣但可以确保收入的奇特的状况．

关于下注的说明：

当赌博的价格确定为押 m 赔 n 的赔率赔付形式，例如按押1赔3的赔率赔付，则下注 $\$m$ 成功，可以赢得 $\$n$ 加上退还赌注．这里隐含的获胜的概率为 $m/(m+n)$，通常这个概率小于1/2，因此，第一个数字大于第二个数字．否则就会变成押3赔1的赔率．

准确的概率下的赌注	25% \$5000	75% \$10 000	
1. 设定的赔率	押5赔13	押15赔4	
隐含概率	28%	79%	总计=107%
如果马赢时的获利	−\$3000	\$2333	期望收益 = \$1000
2. 设定的赔率	押5赔9	押5赔2	
隐含概率	36%	71%	总计=107%
如果马赢时的获利	\$1000	\$1000	期望收益 = \$1000

为使庄家能够获利，对赔率作适当改变．在第一种情形，赔率依赖于马跑赢的实际概率，而在第二种情形，赔率依据下注的钱数确定．

译者注：为帮助读者理解上述表格，我们将详细计算解释如下：

在第一种情形：庄家收到的赌注共计 \$5000 + \$10 000 = \$15 000，如果第一匹马赢，该庄家除返还第一个下注者的赌注 \$5000 外还要赔付 \$13 000，故损益为 \$15 000 - \$5000 - \$13 000 = - \$3000 .

如果第二匹马赢，该庄家除返还第二个下注者的赌注 \$10 000 外还要赔付 $\$10\,000 \times \frac{4}{15} = \$2667$ ，故损益为 \$15 000 - \$10 000 - \$2667 = \$2333 .

由于第一匹马获胜的概率为 25%，第二匹马获胜的概率为 75%，所以庄家的平均损益为：

$$-\$3000 \times 25\% + \$2333 \times 75\% = -\$750 + \$1750 = \$1000.$$

对第二种情形，读者可以类似地计算.

目　录

第1章 引　　言

金融市场产品可以分为两大类，有“标的”证券：股票、债券、商品、外币；和它们的“衍生证券”，是关于某种标的证券在未来的支付或转移的未定权益．衍生证券可以降低风险（比如使得参与者可以在现在就锁定未来交易的价格）也可以放大风险．一个无成本的合约同意支付一只股票和未来价格的差额，使得合约双方无需用现在的资本来购买就能拥有股票，从而来控制风险．

从形式上讲，一类依赖于另一类，如果没有标的（证券），就没有未定权益，但是这两类之间的联系是相当复杂及不确定的，因为在同一市场里每一类都有大量的交易．股票的明显随机的本质经过过滤到未定权益，因此未定权益也是随机的．

数学家早就知道随机并不意味着没有内在的结构．粗略地说，事情的随机性通常以非随机的方式出现．概率和数学期望的研究揭示了处置随机性的一种途径，本书将在概率的基础上来发现未定权益和它们的随机标的证券最强的可能的联系．然而，目前真实的情况是，问题很复杂，并且在这个新的领域有过不少失败的尝试，其中有一个是特别令人着迷的．

3

1.1 期望定价

考虑以下的游戏．某人掷一个硬币，如果正面向上，将奖励你1美元；如果反面向上，则无奖励，你该为这个游戏支付什么价格？如果硬币是均匀的，出现正面和反面的机会相等．大约一半的时间会赢得这1美元，而另一半时间将一无所获．经过充分多次后，平均每次你期望得到50美分，因此支付多于50美分是不太合算的，而少于50美分对游戏的庄家则过于浪费，因而50美分正合适．

在期望的更加正式的数学定义下，50美分正是每次游戏的期望收益．对游戏的概率分析表明，虽然每次掷硬币的结果是随机的，但这并非与游戏的更深层的非随机结构不相容．我们可以假设存在与掷硬币结果可能性相对应的度量，硬币正面或反面向上的概率为1/2．上述概率的形成的同时带来了期望的概念．在离散情形，就是每次结果的数值与相应的概率的加权平均．上述游戏的期望支付为 $\frac{1}{2}\times \$1+\frac{1}{2}\times \$0=\$0.50$.

这个形式上的期望可以通过以下的定理与游戏的“价格”联系起来．

柯尔莫哥洛夫强大数定律

假设有一列独立的服从同一分布的随机数列 $X_1, X_2, X_3, \cdots$，均值（期望值）为 μ.

设 S_n 是前 n 项的算术平均，即 $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$，那么当 n 趋向无穷时，S_n 以概率1趋于均值 μ.

如果结果的算术平均值确定地收敛于数学期望，则每次游戏的平均收益/损失趋于数学期望减去支付每次游戏的价格，如果两者之差为正数，则从长远看，你最终是获益的；反之如果为负数，则最终你肯定会蒙受损失的. 如果游戏次数很少，则不能保证输赢，但随着次数的增加，最终出现的是数学期望. 在这个意义下，50美分是每次游戏的公平价格.

4

但是这是一个可执行的价格吗？如果某人同意你以每次付40美分可以赢1美元的比价和他玩这个游戏，但不允许你玩多次，只允许你玩一次大的赌注. 如果赢了，根据你下的赌注你可以按上述比价得到奖励（比如，下注 \$40，如果赢，可得 \$100）. 如前所述，强大数定律可以保证你在重复多次的游戏中获利. 但如果只允许玩一次，强大数定律就不起作用. 付40美分可以赢1美元的比价无疑是金融自杀，用你的住宅做抵押，卖掉你所有的财产，按你的信用极限向银行贷款来玩一次这样的游戏显然是不明智的.

因此这个游戏的市场可以以不同于数学期望的价格来交易. 对于次数少的游戏，可以出任何价格. 接受价格的“买家”和“卖家”的数量可能与游戏结果的数学期望毫无关系，但是作为开始游戏的指导价格，付一个合适的价格，大数定律和数学期望可起到一定的作用.

1.1.1　货币的时间价值

我们忽略了一个重要的细节——货币的时间价值. 通过同一时间游戏的价格和它的回报简化了对掷硬币游戏的分析. 如果掷硬币的游戏发生在一年之末，而对游戏的支付是在年初，那么实际上我们必须找到掷硬币游戏这个未定收益现在的而不是将来的价值.

如果现在是1月份，则12月份的1美元在现在的价值就不到1美元. 利率的存在即承认了这一点，而债券市场也因此产生. 假设存在一个这些未来承诺的市场，这样构造出来的债券的价格就由某种利率决定. 特别地：

货币的时间价值

假设对于小于某个时间 τ 的任何时刻 T，T 时刻的一美元现值是 $\exp(-rT)$，其中 $r > 0$ 为某个常数. 称利率 r 为这个时间段中的连续复利.

5

利率市场并没有这么简单，r 无须是常数. 在实际市场里，r 的确不是常数. 但在此假设它是常数，就能得到所玩游戏在 T 时刻基于强大数定律的价格. 在 T 时刻付50美分等价于现在付 $50\exp(-rT)$ 美分. 为什么？这是因为可以在现在以 $50\exp(-rT)$ 的价格购买半个单位的债券，保证在 T 时刻得到50美分. 因此现在有说服力的价格是 $50\exp(-rT)$ 美分，而不是50美分.

1.1.2　股票，不是货币

在现实的金融市场中股票是如何定价的呢？一个被广泛接受的模型就是股票价格服从

对数正态分布. 基于上述货币的时间价值，可以证明这个结论.

股票模型

假定存在一个随机变量 X，服从均值为 μ、标准差为 σ 的正态分布，使得在 T 时段股票价格的对数变化为 X，即

$$\log S_T = \log S_0 + X, \quad 或 \quad S_T = S_0 \exp(X).$$

假设现在有一个关于这个股票的未定权益，即承诺在某种确定情况下支付确定数量的货币的一个合约，就像掷硬币游戏那样. 关于股票的最老的或许也是最自然的未定权益就是远期：双方签订的一个合约规定，一方在未来某一约定时间点按约定价格向另一方出售约定数量的股票. 称股票为出售的远期. 远期股票“游戏”的“定价问题”是：一年以后出售的股票的价格在合约上应约定为多少?

可以更正式地把这个问题表述出来. T 时刻股票的价格为 S_T，合约约定的价格为 K，则在期满发生股票交易时，合约的价值为 $S_T - K$. 根据货币的时间价值可知，未定权益现在的价值是 $\exp(-rT)(S_T - K)$. 由强大数定律知这个随机变量的期望值 $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K))$ 应该等于0. 如果它是正值或负值，如长期使用这个价格，那么会导致合约的某一方获利. 因此对于“定价问题”的合理的解答是 K 应该等于使 $\mathbb{E}(\exp(-rT)(S_T - K)) = 0$ 的值：$K = \mathbb{E}(S_T)$.

6

$\mathbb{E}(S_T)$ 是什么? 我们已经假设 $\log S_T - \log S_0$ 服从均值为 μ、标准差为 σ^2 的正态分布，也就是要计算 $\mathbb{E}(S_0 \exp(X))$，其中 X 服从均值为 μ、标准差为 σ^2 的正态分布. 为此，可以利用下面的结果：

非专业统计学家的法则

给定一个取实数值的随机变量 X，它的概率密度函数为 $f(x)$，则对于任何可积的实值函数 $h(X)$，其数学期望为

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

因为 X 服从正态分布，X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

利用上述法则，通过积分运算可以得到 T 时刻股票的期望价格为 $S_0 \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)$，这是由强大数定律保证的远期合约的价格，与掷硬币游戏类似，这只是对市场交易水平的一种建议. 但是这里采用的技术显然也适用于远期以外的衍生产品定价. 很多未定权益可以转换成函数 $h(X)$ 的形式，应用上述法则，也可以推导出它们的期望价值. 将这个期望值贴现就给出了一个由强大数定律联系于经济实际的理论值.

1.2 套利定价

综上所述，尽管强大数定律看似有理且富有魅力，但却完全不实用．刚才导出的远期的价格只有在某种不幸的巧合才能作为市场价格．在可以自由买卖股票的市场上，可以无成本地持有或卖空任意数量的股票，根据强大数定律去做远期交易会导致灾难性的后果，在大多数情况下，人们会有兴趣以这个价格向你无限地出售远期．

7

为什么强大数定律如此不适合于远期？正如前面提到的掷硬币的游戏，强大数定律给出的不是一个可执行的价格，仅仅是一个建议价格．*而另外一种完全不同的机制可以提供一个可执行的价格*．合约的公平价格是 $S_0\exp(rT)$，它不依赖于股票的期望值，甚至也不依赖于有特定分布的股票价格．合约的双方可以在合约开始之时写明双方权益并耐心等待，直到到期之日执行合约．

操作策略

考虑合约的卖方，他有义务在到期日向买方出售约定数量的股票．卖方可以在签订合约时借入 S_0 用于购买股票，然后把股票放进抽屉里等待．到合约期满时，他要还贷款．如果按无风险复利 r 计算利息，他连本带利须还 $S_0\exp(rT)$，但那时他已经卖掉了股票，如果合约规定的股票的交易价格少于 $S_0\exp(rT)$，他肯定要遭受损失．

因此远期的价格应不低于 $S_0\exp(rT)$．当然远期的买方也可以作相反的操作，如果远期的价格高于 $S_0\exp(rT)$，买方就会蒙受损失，因此远期的价格又不能高于 $S_0\exp(rT)$．

从而就有了一个可执行的价格，它不是 $S_0\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$，而是 $S_0\exp(rT)$．任何给远期合约规定一个与此不同的价格的企图，都会使某一方通过适当的操作享受免费的午餐．和玩掷硬币的游戏不同的是，现在抵押房产进行交易是理性的举动．这种市场行为有一个很古老的名称——套利．$S_0\exp(rT)$ 的价格是一个套利价格——它是公平的，因为任何其他的价格都会使某一方享受免费的午餐．强大数定律没错的话——如果 $S_0\exp(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)$ 高于 $S_0\exp(rT)$，则合约的买方可以赚钱．当然如果股票价格预期比无风险利率 r 增长得快的话，则股票的买家也会增加得很快．套利价格的存在，尽管令人惊讶，却取代了强大数定律．简而言之，存在一个套利价格，除此以外的定价都是危险的．

8

1.3 从套利到期望

强大数定律和数学期望给出了远期错误的价格，但是从某种意义上讲，远期是一个特例．操作的策略（购买股票并持有它）对于更复杂的权益是不可行的．标准的看涨期权，

给予期权的买家一种权利而不是义务向卖方以事先约定的价格购买股票，对这种期权就不能如法炮制地套利. 如果到期日股票价格高于约定价格，则买方就执行期权，要求按约定的价格购买股票，期权卖方开始时买入后放进抽屉的股票就派上了用场. 但是如果到期日股票价格低于约定价格，期权买方就放弃期权，而拥有股票的卖方就会蒙受无意义的损失.

看来，对看涨期权来说也许强大数定律是适用的，然而直到 1973 年以前人们还不是这么想的. 此前，几乎所有的东西通过期望和强大数定律来定价都是安全的，只有远期和与远期密切相关的产品似乎才有套利价格. 然而，自从 1973 年 Black-Scholes 的备受争议的论文问世后，上述观点的错误才逐渐显示出来. 本书其他地方不再应用强大数定律了. 虽然会不断地用到期望的概念，有点像把水搅混，但只是用做无风险复制的一个工具. 所有衍生证券都可以由标的证券构造——套利无处不在. 9

第2章　离 散 过 程

本书旨在探究套利行为的极限. 我们将逐渐建立一个强有力的数学框架，来描述现实的金融市场并有足够的结构来支持构造技术. 这是一个非常漫长的过程，聪明的办法就是从小模型开始.

2.1　二项式分叉模型

在我们想要描述实际的金融市场时，两样东西是不可或缺的：股票中的随机项和货币的时间价值表示. 先来考虑最简单可行的模型，它由一只股票和一种债券组成.

2.1.1　股票

先考虑很短的单个时间段，从 $t=0$ 开始到 $t=\delta t$ 时结束. 为了表示股票一些无法预测的性质，我们加入一些随机成分. 因此假设股票在该时间段内只发生两种变化：价格上升或下降，用图表示得到一个分叉（图 2-1).

我们将设定股价上升或者下降的概率，以建立其价格的随机变动结构：以概率 p 上升到节点 3；以概率 $1-p$ 下降到节点 2. 股票的初始价格（图中节点 1）记为 s_1. 设以该价格可无限量买卖股票，并持有至 $t=\delta t$ 时刻. 在股票持有期内没有突发事件，持有正或负数量的股票都不产生费用，但在期末，股票将有一个新的价值. 如下降，则移至节点 2 其值为 s_2；如上升，则移至节点 3 其值为 s_3.　10

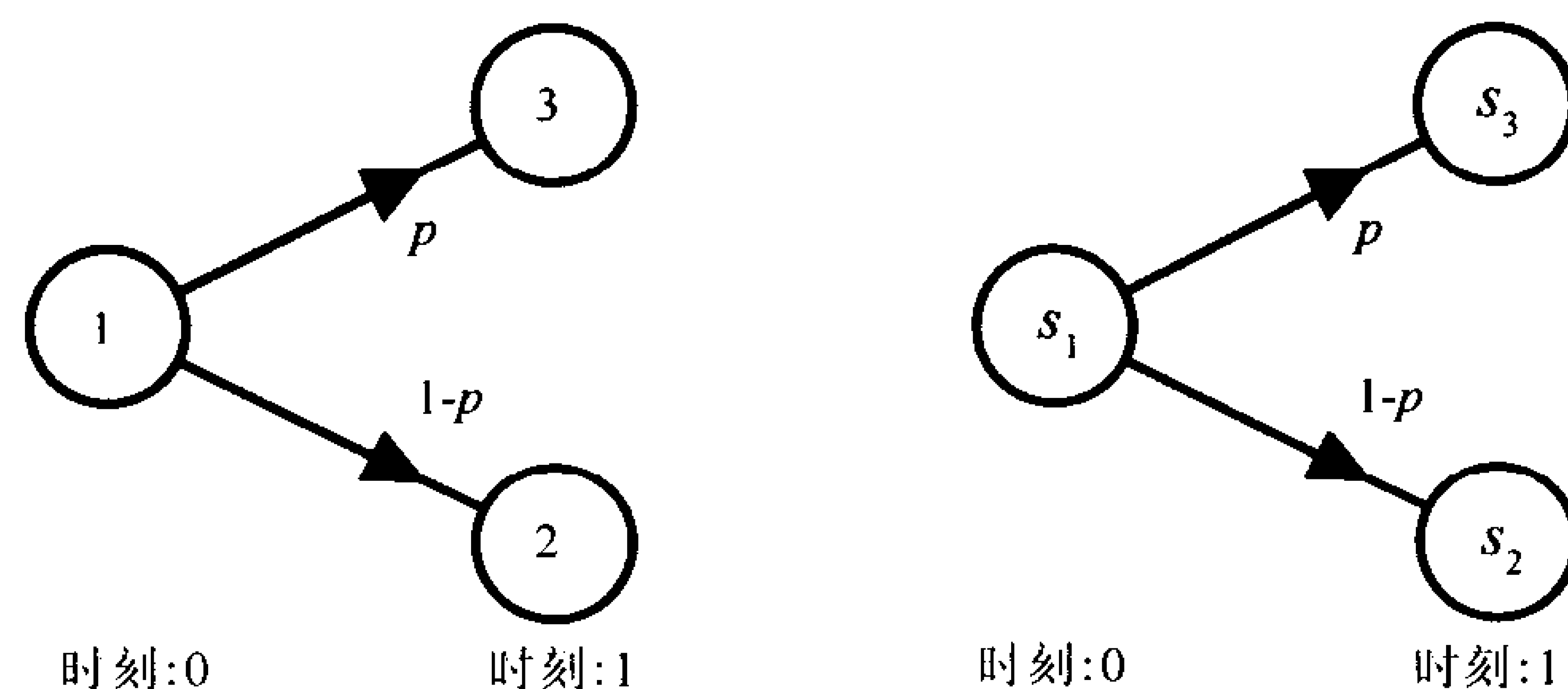


图 2-1　二项式分叉

2.1.2 债券

为了体现货币的时间价值，我们引入现金债券. 以 r 为连续复利，则 $t=0$ 时的 1 美元在 $t=\delta t$ 时刻将会变成 $\exp(r\delta t)$ 美元. 假设可无限量借贷，且利率相同. 我们再引入一个现金债券 B，可在零时刻以价格 B_0 买入或卖出，并在下个时刻确定增值为 $B_0\exp(r\delta t)$.

这两种金融产品就是我们的金融世界了，虽然结构很简单，但是对于投资者而言，仍具有不确定因素. 对于特定的投资者来说，股票的期末价格，只有其中一种会让他满意. 他的投资计划成功与否取决于随机的结果. 即有这么个金融产品的市场，而这个金融产品依赖于期末的股价. 对于未来股价可能造成的损失，投资者的补偿需求可记为函数 f，对于节点 2 和节点 3 这两种未来可能的情况，分别建立奖励或惩罚函数 $f(2)$ 和 $f(3)$. 例如，对一个远期合约，敲定价为 k，则有 $f(2)=s_2-k$ 以及 $f(3)=s_3-k$.

11

2.1.3 无风险组合

现在的问题变成，用一个适当的策略可以严格构造怎样的一族函数 f. 如第 1 章中所提到的可以利用远期. 我们首先卖空现金债券，将所得用于购买股票（成本：s_1），到期末则抛出股票以获得价值为 $s_1\exp(r\delta t)$ 的现金债券. 由套利理论，远期合约的敲定价 k 应该正好是所预期的 $s_1\exp(r\delta t)$.

那么对于更加复杂的函数 f，情况又会怎样呢？仍然能够找到这样组合的策略么？我们的第一个猜测是，恐怕不能. 当期末股价的取值为两个随机的价格之一时，其衍生品的价值也发生了变化. 如果知道 f 的每一种可能值出现的概率，那么 f 在期末的期望值也就可以求得了：$(1-p)f(2)+pf(3)$，但是在这之前我们不可能知道其实际的价格.

2.1.4 仅有债券的策略

当然，我们并不是完全一无所知. 考虑仅有现金债券的投资组合. 经过这段时间现金债券以因子 $\exp(r\delta t)$ 增长，也就是说，在期初购买价值为 $\exp(-r\delta t)[(1-p)f(2)+pf(3)]$ 的贴现债券，到期末时其价值变为 $(1-p)f(2)+pf(3)$. 为什么我们要取这个值作为目标呢？因为它的期末值在形式上正是衍生品在期末的期望价值.

对一个分叉的期望

令 S 为一个二项式分叉过程，在零时刻初值为 s_1，时刻 1 下降至 s_2 或上升至 s_3. 则在上升概率为 p 的情况下，在时刻 1，S 的期望值为：

$$\mathbb{E}_p(S_1)=(1-p)s_2+ps_3.$$

关于 S 的未定权益 f，正好与随机变量 S_1 一样，对其期望的讨论是有意义的. 因此，通过上例的现金债券，我们也可以有意义地来研究该未定权益的期望. 制定策略时应至少达到收支平衡. 我们可以通过现金债券投资组合的初值来预测衍生品的初值. 衍生品价格的预测值可以看作为其期末价值的贴现期望值.

12

当然，这样做的本质仍出于第1章中的强大数定律，只是略被伪装了一下. 与之前相比，这里显然缺少了一个强制项. 我们没有严格地给出衍生品价值可能取的两个值：$f(2)$和$f(3)$，而旨在概率意义下寻求最优.

我们已经知道，对于远期合约而言，这种最优解是不够的. 一个基于股票的远期合约，股票价值服从二项式分叉过程，则该远期的价格并不取决于股票的可能值s_2和s_3，而是通过现金债券B受制于利率r，表现为$s_1\exp(r\delta t)$. 未定权益的贴现期望值并不是一种定价工具.

2.1.5 兼有股票和债券

然而我们能否做得更好一些呢？毕竟我们有两种金融产品来建立一个投资组合，并在整个时间段中持有. 我们来尝试另一种策略. 先前以衍生品的期望值为目标，现用固定利率的现金债券来产生一个预期的价值. 但是相比债券，还有另外一种金融产品，与股票和衍生品联系更加紧密，那就是股票本身. 假设需要保证的只是衍生品本身的价值，无论高低，而不是事先知道的可以作为衍生品价值的合理的预测值.

考虑一个一般的组合(ϕ,ψ)，其中ϕ为股票S所占比例（价值为ϕs_1），ψ为现金债券B所占比例（价值为ψB_0）. 如果在零时刻买入该投资组合，则成本为$\phi s_1+\psi B_0$.

在下个时刻，该组合价值变为两种可能：

$$\phi s_3+\psi B_0\exp(r\delta t) \qquad \text{如股价上升；}$$

$$\text{或者} \quad \phi s_2+\psi B_0\exp(r\delta t) \qquad \text{如股价下降.}$$

这对等式引起了我们的好奇心——现在有两个等式、两种可能的未定权益价值，以及两个自由变量ϕ和ψ. 在股价的合理波动下，要去构造两个价值函数$f(3)$和$f(2)$，而ϕ和ψ则作为可用来调节的两个变量. 此时，策略可以归结为求解两个关于(ϕ,ψ)的方程. [13]

$$\phi s_3+\psi B_0\exp(r\delta t)=f(3),$$

$$\phi s_2+\psi B_0\exp(r\delta t)=f(2).$$

除了s_2与s_3相等，即S可视为债券而非股票的情况，上述方程的解为：

$$\phi=\frac{f(3)-f(2)}{s_3-s_2},$$

$$\psi=B_0^{-1}\exp(-r\delta t)\left(f(3)-\frac{(f(3)-f(2))s_3}{s_3-s_2}\right).$$

应该怎样处理这样的计算结果呢？如果我们买入该组合(ϕ,ψ)并持有它，则等式保证了我们可以达偿所愿：如果股价上升，则组合价值变为$f(3)$；股价下降，则组合价值变为$f(2)$. 至此，衍生品就合成了.

2.1.6 价格是合理的

这个简单的模型展示了一个令人惊奇的策略. 任何衍生品f都可由从某个股票和债券的适当组合来构造，而且可预先构造好. 这必然对未定权益的价值产生影响，它不同于由期

望推导出的价值，这是一个在理想市场中可实施的理性价格. 记 V 为购买(ϕ,ψ)组合的价值，表示为 $\phi s_1+\psi B_0$，则有

$$V=s_1\left(\frac{f(3)-f(2)}{s_3-s_2}\right)+\exp(-r\delta t)\left(f(3)-\frac{(f(3)-f(2))s_3}{s_3-s_2}\right).$$

现在假设其他做市商以低于 V 的价格 P 买入或卖出该衍生品. 则任何投资者可以从做市商手中买入任意数量的该衍生品，再到市场上抛售与之完全匹配的(ϕ,ψ)组合. 到该时段期末时，无论股价如何变化，衍生品的价值正好抵消投资组合价值，从而这组交易是无风险的. 但交易者购买一个单位衍生品/组合可以获利 $V-P$. 通过无限量购买，任何投资者都可获得任意的无风险收益. 因此做市商不可能采用 P 这个不理性的价格，因为市场会快速消化这样一个套利机会.

[14]

类似地，做市商也不可能采用高于 V 的价格 P. 因为人们可以买入(ϕ,ψ)组合而卖出该衍生品，从而锁定每单位交易有 $P-V$ 的无风险利润. 同样市场会再一次消化这样的套利机会.

做市商的双向交易都只能以价格 V 进行，以免授人以无风险套利的机会. 也就是说，V 是在零时刻惟一的理性价格. 我们的模型尽管存在随机性，但若允许套利机会横行于世，则强大数定律就无用武之地了.

例　一步过程的完整描述

假设有一种无息的债券和一只股票，初始价格都是 \$1. 在下一个时段末，股票的价格变为 \$2 或者 \$0.50. 如果一种赌博规定股价上升就支付 \$1，这样一个赌局的价值是多少呢?

解: 令 B 表示债券价格，S 表示股票价格，X 表示赌局的支付. 具体可见图 2-2.

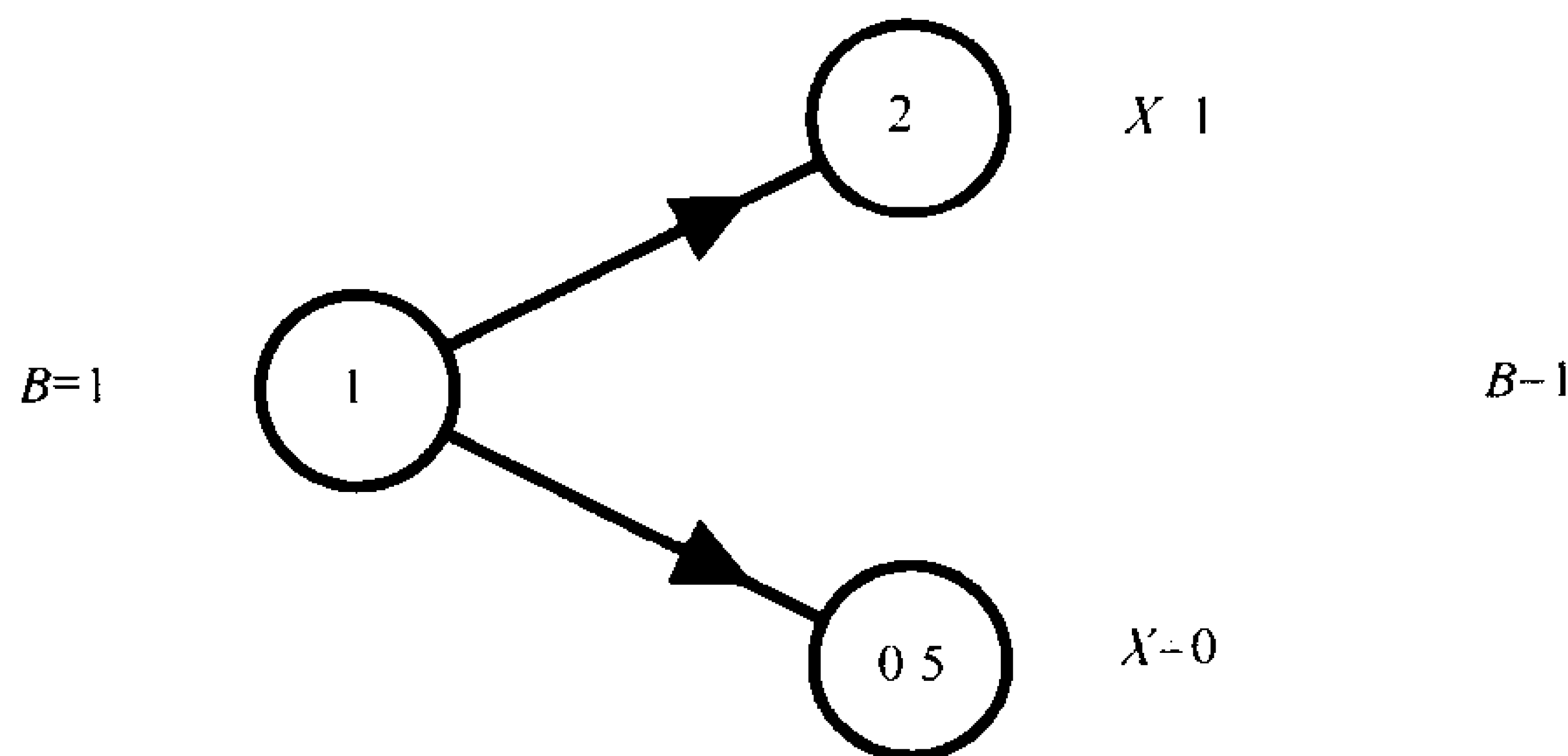


图 2-2　打赌的定价

买入一个投资组合，包括 2/3 单位的股票和借入 1/3 单位的债券. 则该组合在零时刻的价值为$\frac{2}{3}\times\$1-\frac{1}{3}\times\$1=\$0.33$. 如股价上升，则组合价值为$\frac{2}{3}\times\$2-\frac{1}{3}\times\$1=\$1$; 如股价下降，则组合价值为 $\frac{2}{3}\times\$0.5-\frac{1}{3}\times\$1=\$0$. 可见该投资组合完全模拟了赌局的支付，那么该组合的初始价值就应该是赌局的初值，即为 \$0.33.

[15]

2.1.7 回到期望

这里仍然有些玄机. 不考虑巧合，在这个模型中强大数定律可能失效. 用期望来定价的过程涉及概率 p 和 $1-p$，从而导致可能存在无风险利润. 重新整理方程后，来定义一个简化的变量：

$$q = \frac{s_1\exp(r\delta t) - s_2}{s_3 - s_2}.$$

那么应该怎样解释 q 呢? 不失一般性，不妨假设 s_3 大于 s_2. 如果 q 小于或等于 0，则有 $s_1\exp(r\delta t) \leqslant s_2 < s_3$. 而 $s_1\exp(r\delta t)$ 为期初买入价值为 s_1 的现金债券 B 后，在下个时刻的价值. 故可通过卖空现金债券，以融资购买股票来赚取无风险利润. 那么通过规则来消除这种可能性不是没有道理的，即通过规范市场的结构来避免此类事情. 因此对有服从二叉树分支过程的股票 S 的任何市场，我们有 $q>0$.

类似地，当 q 大于等于 1，此时有 $s_2 < s_3 \leqslant s_1\exp(r\delta t)$，此时可通过卖股票而买债券来获得无限量的无风险利润. 综上所述，在理性市场中，q 局限在 $(0,1)$ 这个开区间内，与一个概率函数的约束相同.

现在令人惊奇的是，当我们重新写出投资组合 (ϕ,ψ) 的价值函数 V 时（请试一下），可以得到：

$$V = \exp(-r\delta t)((1-q)f(2) + qf(3)).$$

尽管看似荒诞，但是这确实是未定权益在 q 下的期望. 而期望算子如此重现却有些意外.

价格函数 V 并不是衍生品在未来的期望值（由现金债券的增值贴现），它并不包含概率 p，而可以用一个 $(0,1)$ 之间的某个数 q 写成贴现期望值的形式. 如将期望算子看作对未来市场信息的某种暗示，例如遵循强大数定律在多次测试下的平均值，那么 V 就应该理解为一个期望，而不是想当然地把它看作期望值. 尽管有些咬文嚼字，V 是一个期望，而不是期望值. 另外，很容易验证远期合约的正确的敲定价为：$s_1\exp(r\delta t)$. 16

习题

2.1 一个敲定价为 k 的远期合约，证明其支付函数为 f，其中 $f(2)=s_2-k$，$f(3)=s_3-k$. 利用 V 的公式，验证其合理的定价为 $s_1\exp(r\delta t)$.

2.2 二叉树模型

本节将分叉推广到树. 我们刚才建立的单时段模型固然容易分析，但却过于简化. 它包括一只随机变化的股票和一种现金债券，并且在单个时段末股价变化仅有两个可能值. 金融市场当然不是这么简单的. 然而，如果我们将分叉模型更复杂化，便可以将结果推广

到一个更大、更好的模型. 这就是本节中要讨论的——通过分叉来建立二叉树，看能得到什么样的结果.

假设金融市场仍只有二种产品：一种贴现债券 B 和一只股票 S. 并且可以无限量买卖它们，没有交易费用、违约风险和买卖差价. 但是不是单时段，将允许每段长为 δt 的多时段串.

2.2.1　股票

正如市场所要求的那样，股价 S 的变动应当是随机的，但是这种随机性也可以有自己的结构. 在最简单的二项式分叉模型中，我们设定股价在期末时仅发生两种可能值的变化，并始终保持这结构. 这次要把这些分叉连接成一棵树. 最开始的第一段，从 $t=0$ 到 $t=\delta t$ 时刻，与前面相同（由分叉构造的树是从一个分叉开始的）. 如果 S 在零时刻的值为 $S_0=s_1$，那么下一时刻虽然无法知道 S 的确切值，但却可以确定变化的范围，即 S_1 只有两个可能值：s_2 和 s_3.

现在可以很自然地拓展这个分叉. 时间向后推一个 δt，则股价仍然可能发生两种变化，但由于基于 1 时刻的值，故共有四种可能值. 从 s_2 出发，S_2 可能变为 s_4 或者 s_5；而从 s_3 出发，S_2 可能变为 s_6 或者 s_7.

17

正如图 2-3 所示，在第 i 时刻，股价将有 2^i 种可能值. 尽管此时，从给定 $(i-1)$ 时刻的值出发，股价仍然只允许发生两种可能的变化：从节点 j 出发，下降至节点 $2j$ 或上升至 $2j+1$.

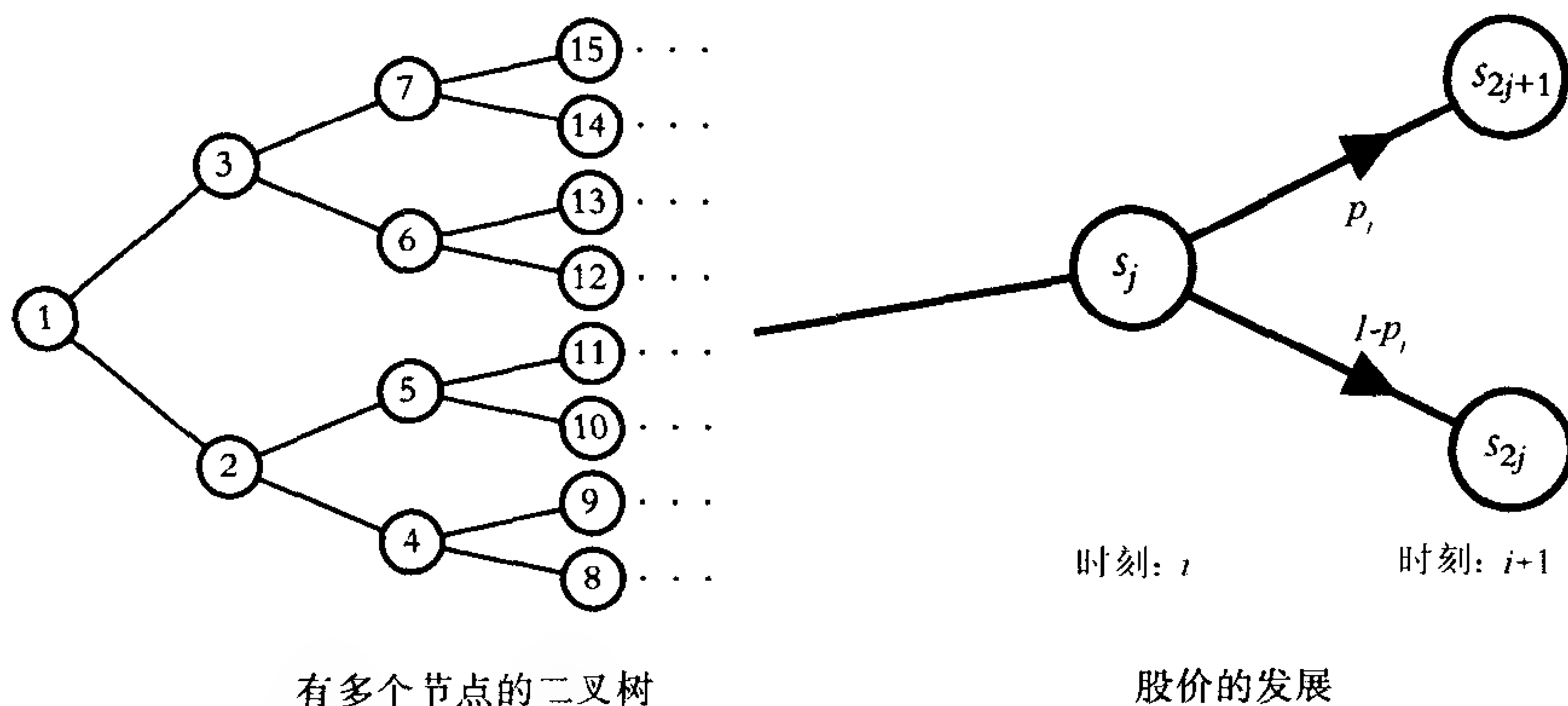


图 2-3

这个树的建立使模型更富有弹性. 一个未定权益可以拥有任意多个可能值，而不再仅限于 2 个值. 比如考虑一只股票在 t 时刻有一千个可能的值是合理的复杂水平的话，那么只要令 δt 足够小，得到 10 层左右的树即可. 同时，概率的结构也变得更加丰富. 每一次升降的选择都与一个概率相联系. 从符号记法的角度来看，可以仅用一个数 p_j（向上的概率）来表示升降这一对概率（二者相加和为 1）. 如图 2-3 所示，从 s_j 出发，向上到 s_{2j+1} 的概率记为 p_j；向下到 s_{2j} 的概率记为 $1-p_j$.

2.2.2 现金债券

为了与这样成长的股价结构相匹配，我们需要一成长的债券. 在简单的分叉模型中，现金债券的走势是完全可预料的. 在整个时间段内，存在一个已知的利率 r 使现金债券以因子 $\exp(r\delta t)$ 的倍数持续增长. 这样苛刻的条件是不合理的，无需在二叉树的整个过程中固定一个利率. 而是可以引入一个利率序列，$R_0, R_1, \cdots$，且每个利率在相应时段的起始点就已经知道. 则在时刻 $n\delta t$，这样的现金债券的价值变为 $B_0\exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} R_i\delta t\right)$. [18]

有必要比较一下现金债券和股票. 承认债券中的随机因素（虽然事实上我们对其具体形式并不感兴趣）. 但是与股票相比，债券的随机性是大不相同的. 现金债券正如货币的时间价值一样，所支付和赚取的利息虽然随着时间变化，但是在下个时刻的债券价值却是确定的，因为它只依赖于在该时段开始时就已经知道的利率.

为简单起见，我们仍然假设在二叉树展开的整个过程中，现金债券的利率始终为 r，则到 $n\delta t$ 时刻其价值为 $B_0\exp(rn\delta t)$.

2.2.3 树是复杂的

到这里，树的二项式结构似乎是相当随意的，或极为简化的. 树比单一的分叉要好些，但它仍然不能表示股票和债券价值的连续变化. 而事实上，我们将看到离散的情况不仅仅满足了我们的需要. 我们最终的目标是理解当标的股票在连续时间内取连续值时无风险结构的局限性（或无局限），而这正是直接且自然地从这一点开始的. 当 δt 趋向于零，这个模型就与我们构思的模型相差无几了，或更好些. 更确切地说，当我们因为其结构单纯而放弃树的模型之前，应该好好思考一下，将要建的模型是否会过于复杂，而无法用于分析.

2.2.4 后推法

事实上，在分叉模型中我们已经完成了最困难的工作. 将 2.1 节中这些结论延伸到树模型是非常直接的. 关键思想就是后推法——将构造的资产组合每次往回退一个时段，直到将未定权益推导到所要求的起始位置.

考察基于股票 S 的一个一般的未定权益. 当我们研究树的一个分叉时，函数 f 仅依赖于期末所选择的节点. 现在将该方法推广到未定权益，不仅涵盖其执行时 S 的值，而且涵盖在此之前直到那个节点的 S 的整个历史. [19]

股票的二叉树结构并非是完全任意的——它嵌入了节点和该节点前股价变化的路径（包括该节点）之间的一一对应关系. 没有其他路径可以到达那个节点，通过该路径也不能达到其他的节点. 也就是说，对树上特定的节点都伴有未定权益的一个价值. 我们应当保证树的有限性——有终止时刻，从而可完全确定未定权益. 在现实的金融世界中，这个条件不是没有道理的. 一个一般的未定权益可以理解为未定权益有效时间范围内节点上的某个函数.

2.2.5 两步过程

在单时段的分叉模型中，我们运用了期望算子. 这里，我们得花点力气建立一个由两步过程. 三层分叉组成的树. 如果行得通，再从两步过程推广开去.

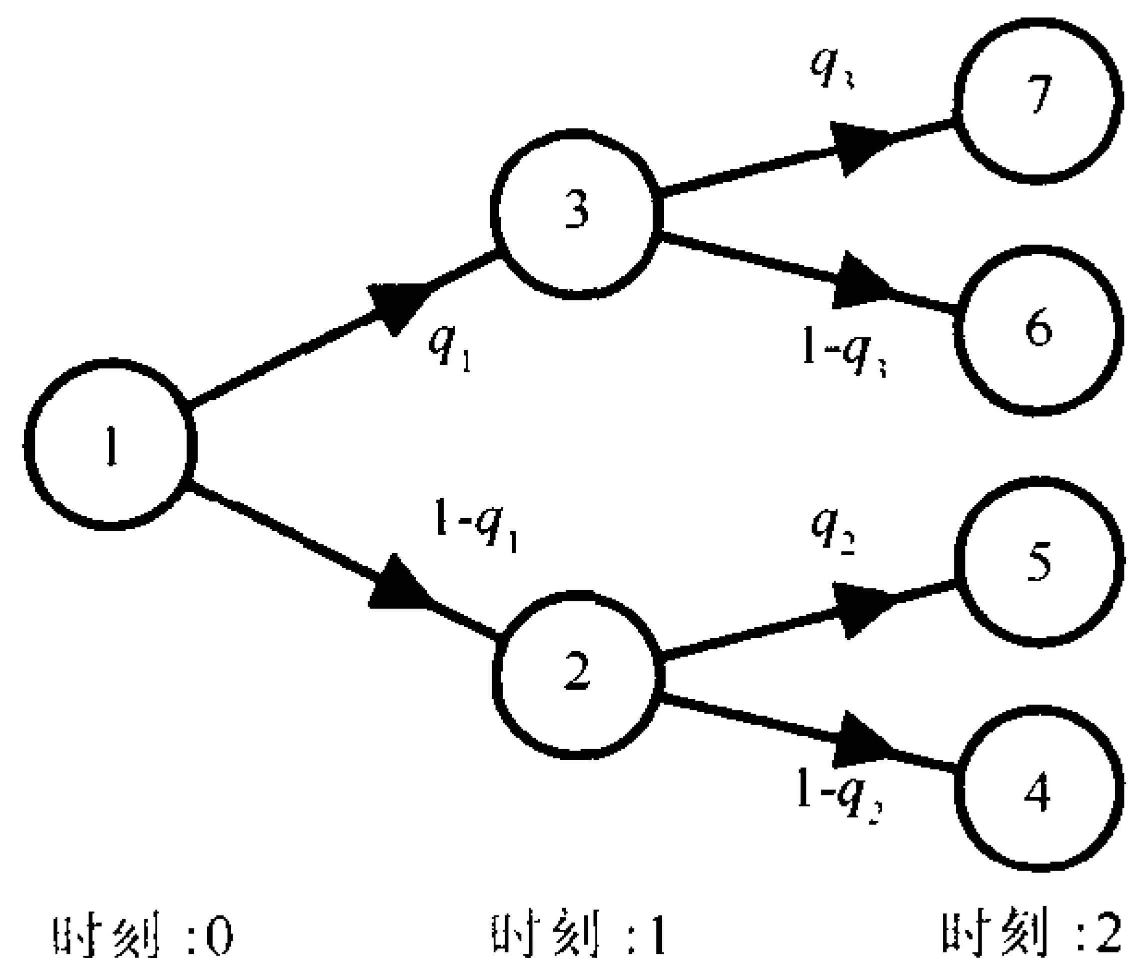


图2-4　时刻0的两步分叉

假设在任何分叉中利率都是常数 r，则存在某个相应的 $q_j s$ 的集合，使得在 i 时刻的第 j 个节点上，衍生品的价值 $f(j)$ 可以写成：

$$f(j) = e^{-r\delta t}(q_j f(2j+1) + (1-q_j)f(2j)).$$

这是在 $(i+1)$ 时刻，未定权益价值 $f(2j+1)$ 或 $f(2j)$ 在 q_j 下的贴现期望值. 故在二步树 [20] (图2-4) 中，从节点3到节点6、7，以及从节点2到节点4、5的两个分叉都与一步分叉的结构完全一致. 也就是说 $f(3)$ 可以由 $f(6)$ 和 $f(7)$ 表示为：

$$f(3) = e^{-r\delta t}(q_3 f(7) + (1-q_3)f(6)).$$

类似地，$f(2)$ 可以由 $f(4)$ 和 $f(5)$ 表示：

$$f(2) = e^{-r\delta t}(q_2 f(5) + (1-q_2)f(4)).$$

这里，q_j 是概率 $(s_j\exp(r\delta t) - s_{2j})/(s_{2j+1} - s_{2j})$，例如

$$q_2 = \frac{s_2\exp(r\delta t) - s_4}{s_5 - s_4},\quad q_3 = \frac{s_3\exp(r\delta t) - s_6}{s_7 - s_6}.$$

而前面已经得到，如果股价第一次跳跃为上升，则未定权益在1时刻的价值为 $f(3)$；若第一次跳跃为下降，则价值为 $f(2)$. 而第一个分叉，从节点1到节点2、3也有单一的分叉结构. 则它在零时刻的价值可表为

$$f(1) = e^{-r\delta t}(q_1 f(3) + (1-q_1)f(2)).$$

综合以上三个方程，可得未定权益在零时刻的价值表示成如下比较复杂的形式，

$$\begin{aligned} f(1) = e^{-2r\delta t}(&q_1q_3 f(7) + q_1(1-q_3)f(6) \\ &+ (1-q_1)q_2 f(5) + (1-q_1)(1-q_2)f(4)). \end{aligned}$$

对于树的期望我们还没有严格的定义，但是其大致形态已经很清楚了.

路径概率

沿着树上某条特定路径的过程的概率，就是各个分支概率的乘积. 例如，在图2-4中，连续两次上升的概率为 q_1q_3，先上升后下降的概率为 $q_1(1-q_3)$，依此类推.

这就是经常提到的，对独立事件，其概率相乘.

树上的期望

某未定权益在树的末节点上的期望，等于这些节点上未定权益的价值关于达到节点的路径概率的加权和.

21

两步过程的二叉树有四条路径，而每条路径上有两个概率，分别为第一次跳跃和第二次跳跃的概率. 所以路径概率，即遵循某条特定路径的概率，应该是它们的乘积.

则未定权益的期望为其四个结果关于路径概率的加权和. 观察上述推导的表达式，对应"概率树"(q_1,q_2,q_3)的四个结果为 $f(7),\ldots,f(4)$，对应概率为 q_1q_3，$q_1(1-q_3)$，$(1-q_1)q_2$，$(1-q_1)(1-q_2)$，并以适当的因子 $e^{-2r\delta t}$ 加以贴现.

对未定权益的定价和它的期望，两步过程的二叉树由简单的三个分支组成，依此类推.

2.2.6 推导的步骤

让我们回到更一般的 n 时段的树的情况，从最后一层开始. 在最后的简单分叉中所有的节点都对应相应的未定权益的价值并成对地出现. 考虑从$(n-1)$时刻的一个节点变为 n 时刻的两个节点的最后分叉中的任何一个. 由第2.1节中的结果，在树的根点构造的一个由股票和债券组成的无风险组合(ϕ,ψ)，可以得到时刻 n 未定权益的价值.（在每个分支处，增长后的股票和债券的价值，与前面简单分叉模型中的股票和债券都是一样的.）

因此$(n-1)$时刻的节点为未定权益层上分支的根节点，而这些分叉的终点对应未定权益的套利价格——$(n-1)$时刻未定权益的价值不是由投资者手中的合约来决定的（合约只对最后一层节点有效），而要考虑套利原理. 由此，我们从最后一层确定的未定权益价格开始，往回推出前一层节点上的确定的价值. 这就是推导的步骤，我们将最后一层的未定权益往回推导了一步.

2.2.7 推导的结果

重复上述的步骤，即可完成整棵树的往回反推过程. 因为每一层都可以与其前一层分开而看作一步分叉过程，故从每一层都可以推出前面一层节点上的价值. 我们不断重复，这是一个递归的过程. 投资者通过未定权益的价值，得到最后一层节点上的值，而我们通过在每个分叉处构造组合(ϕ,ψ)就推导出其他节点的值，并保证每一步结果都是正确的.

22

最后，可以得到二叉树根节点的单一值. 这就是衍生品在零时刻的价值——为什么呢? 正如单个分叉模型中一样，存在某个投资组合（虽然在每个时刻点都会变化），无论股价变化走过哪条路径，组合的价值最终会无一例外地指向未定权益所要求支付的价格.

现在我们对构造这样的所需投资组合的复杂度有了一定的认识. 不同于先前单一的股票百分比函数 ϕ，现在得到一族数，每个节点都对应一个 ϕ. 随着命运之神掷下骰子，股价在树上上下跳动，组合中的 ϕ 的值也随之发生跳跃. 虽然对一个确定的构造程序这似乎有点不合情理，但是(ϕ_i,ψ_i)却与股票一样，也是随机的. 当然，它们之间有一个至关重要的不同之处，(ϕ_i,ψ_i)的取值是事先确定的，比股票提前一步.

套利原理也同样可以应用于二叉树模型. 而二叉树由很多分叉构成，故强大数定律不再适用. 所有的未定权益可以由股票和债券的投资组合复制，从而所有的未定权益都有一个套利价格.

2.2.8 回到期望

强大数定律可能会失效，那么期望呢？我们不需要概率 p_j，但是期望算子的重现，并不是与分叉模型的简单情况巧合. 期望算子可以与正确的结果一起出现. 而且正如前一节中的结论，在一个适当的“概率”下，期望算子将产生正确的*局部*套期保值. 以下我们将展示，基于某个适当的概率集，期望算子也能导致正确的*全局*套期保值.

2.2.9 一个有用的例子

现在通过一个具体的例子，来看看这一切到底是怎样运作的. 如图2-5中的二叉树称作重组的，因每一个分支都可以重新回到一起或者重组在同一个节点. 这样的树更方便计算. 只要我们记住，到末端的路径绝不止一条. 树上的节点就是股票的价格 s，在每个节点处股价会以 3/4 的概率上升，以 1/4 的概率下降. （简单起见，利率为零. ）

23

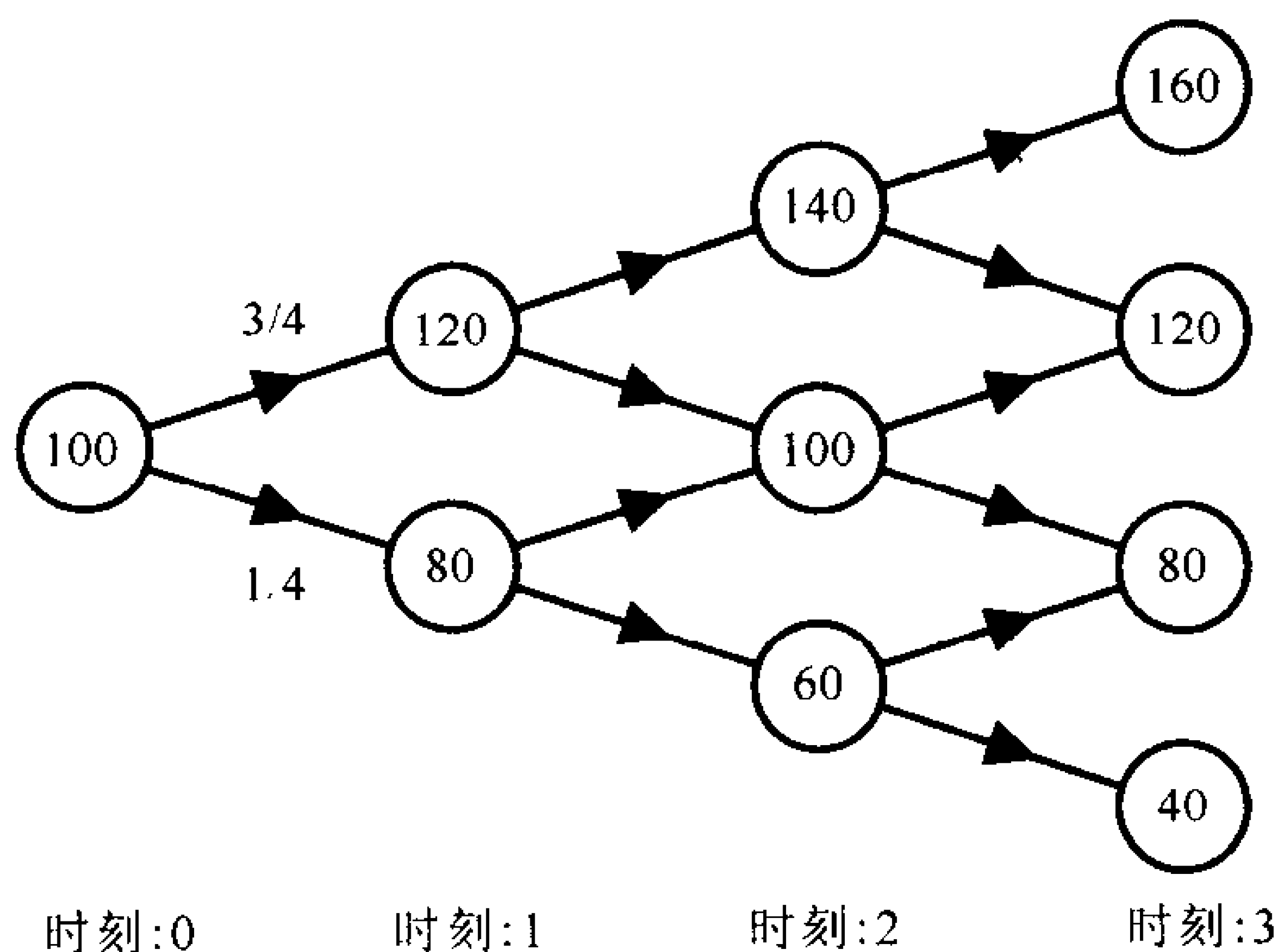


图 2-5 重组树上的股票价格过程

那么，在时刻 3 股票买入价格为 100 的期权的价值是多少呢？

通过时刻 3 这一列股票的值，很容易计算出此时未定权益的价值. 由上而下分别为 60,20,0,0.

我们现在需要新的概率 q 以及未定权益价值 f 的公式. 因为利率 r 为零，则等式可简化一些. 设即将发生“向上”或“向下”的跳跃，那么（风险中性）概率 q 可写成：

$$q = \frac{s_{now} - s_{down}}{s_{up} - s_{down}}.$$

而未定权益的价值f就可表示为：

$$f_{now} = qf_{up} + (1 - q)f_{down}.$$

通过计算得到在每个节点处新的概率 q 均为 1/2. 现在我们在成对的末节点处，应用上、下的公式，来计算倒数第二列时刻 2 的期权价值. 图 2-6 显示了前面两个计算的结果.

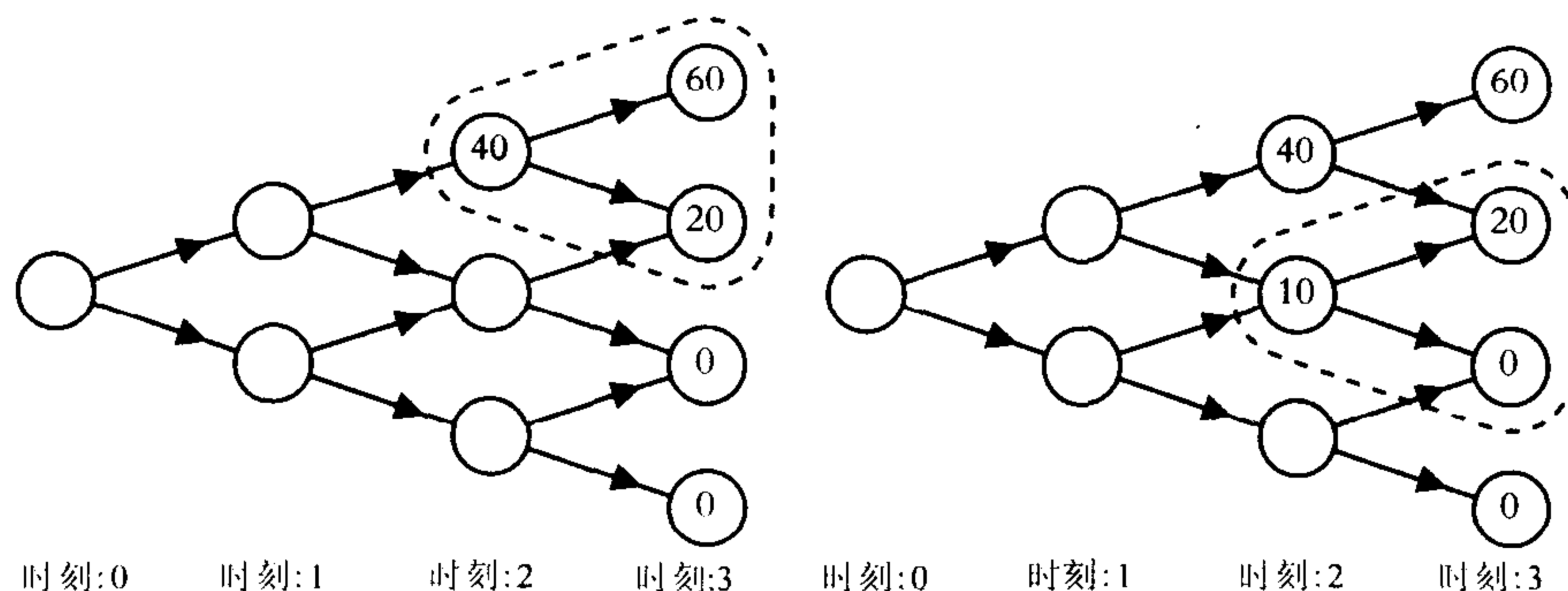


图 2-6 时刻 2 的期权权益及其价值

由此得到时刻 2 的节点的期权价值，再重复上述计算，得时刻 1 上的值，依此类推. 最终得到整棵二叉树上的值（图 2-7）.

24

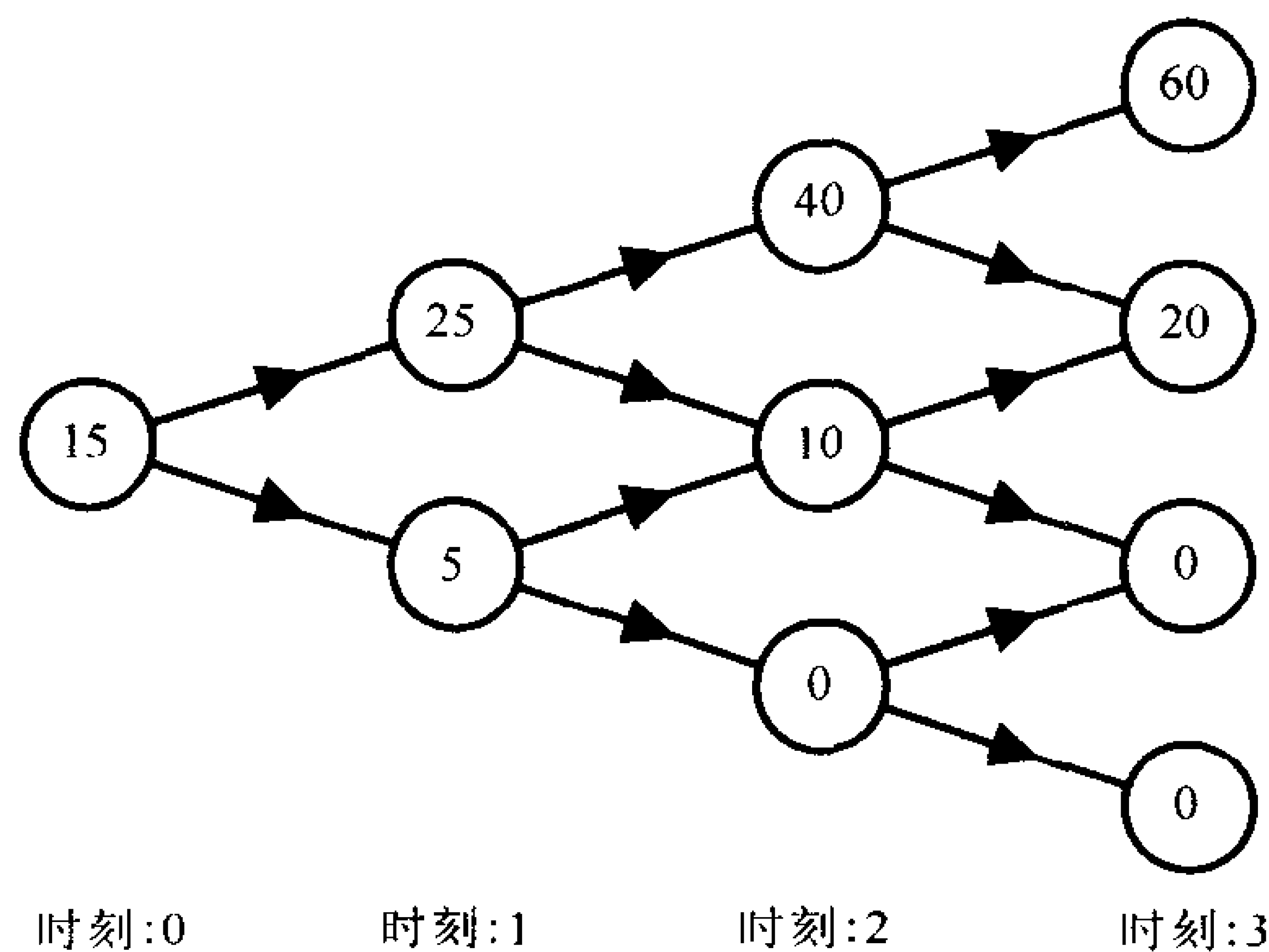


图 2-7 关于期权权益的树

零时刻的期权价值为 15. 用该公式来制定我们的套期保值策略，在任何当前时刻，我们应当用

$$\phi = \frac{f_{up} - f_{down}}{s_{up} - s_{down}}$$

单位的股票来套期保值.

时刻 0　期权价值为 15. 计算 ϕ 为 $(25-5)/(120-80)=0.5$. 买入 0.5 个单位的股票需花费 50，故需要再借取 35.

假设股价上升至 120

[25] 时刻 1　新的 ϕ 为 $(40-10)/(140-100)=0.75$，按这个新的股价再买入 0.25 个单位的股票，总欠债为 65.

假设股价又上升至 140

时刻 2　新的 ϕ 为 $(60-20)/(160-120)=1$，继续买入直至持有 1 个单位的股票，总欠债为 100.

最后假设股价回落至 120

时刻 3　此时期权处于价内. 我们正好卖出 1 个单位的股票，得到现金 100，以清偿债务.（事实上，即使股价升至 160，结果也是一样的.）

表 2-1 清楚地显示了随时间变化的不同过程. 投资组合策略对前一时段有效，比如在时刻 $i=0$ 到 $i=1$ 之间持有 ϕ_1 单位的股票. 相应的期权价值也同时等价于新的和老的投资组合，例如 V_1 既等于 $\phi_1 S_1+\psi_1$ 也等于 $\phi_2 S_1+\psi_2$.

表 2-1　期权和投资组合的演变

时刻 i	上一次跳跃	股价 S_i	期权价值 V_i	持有股票比例 ϕ_i	持有债券比例 ψ_i
0	–	100	15	–	–
1	向上	120	25	0.50	−35
2	向上	140	40	0.75	−65
3	向下	120	20	1.00	−100

以上是比较令人满意的一种情况，如果股价的第一次跳跃是向下的呢?

假设股价下降至 80

时刻 1　此时新的 ϕ 为 $(10-0)/(100-60)=0.25$，我们卖出一半的股票，将负债减至 15.

假设股价上升至 100

时刻 2　下一个套期保值策略 ϕ 为 $(20-0)/(120-80)=0.50$，则再买入 0.25 个单位的股票，负债为 40.

假设股价又回落至 80

[26] 时刻 3　此时手中的股票价值为 40，正好抵消负债，而期权处于价外不执行，再次达到收支平衡（表 2-2).

表 2-2　期权和投资组合在另一条路径下的演变

时刻 i	上一次跳跃	股价 S_i	期权价值 V_i	持有股票比例 ϕ_i	持有债券比例 ψ_i
0	–	100	15	–	–
1	向下	80	5	0.50	−35
2	向上	100	10	0.25	−15
3	向下	80	0	0.50	−40

注意到整个过程 (S,V,ϕ,ψ) 与每次股价的升降有关. 特别的, ϕ 和 ψ 也是随机的, 但它们只依赖于正好到在需要求解时刻之前的跳跃.

习题

2.2 设某种数字期权合约在股票价格高于初始价时能盈利 100. 重复上述计算.

基于数学期望的结果仍然存在. 在概率 q 下, 每个末节点的概率分别为 (由上而下) 1/8,3/8,3/8,1/8, 基于这些概率可计算得未定权益的期望值为 15. 但是如果用股价变动的概率, 向上概率为 3/4, 向下为 1/4, 是无法得到上述结果的. (此时, 末节点的概率为 27/64,27/64,9/64,1/64, 由此推算未定权益的期望值为 33.75.)

2.2.10 结论

综上所述, 二叉树模型保证, 任何未定权益相对于隐含的衍生产品在其每个节点处仅有一个可能的价值, 否则就会发生套利. 且可以向后逐步导出整棵树的未定权益的值. 套利理论渗透于每个分叉以至全树.

另外, 每个小分叉都有自己的概率 q_j, 未定权益在该分叉的根节点的价值可表示为在这个概率 q_j 下的局部期望. 而局部复制策略 (ϕ_j,ψ_j) 的成本可以看作一个贴现的期望. 整个局部策略链为一个全局的套期保值策略. 由此, 全局的贴现期望算子就给出了未定权益在二叉树上的价值.

[27]

小结

$$q=\frac{e^{r\delta t}s_{\text{now}}-s_{\text{down}}}{s_{\text{up}}-s_{\text{down}}} \qquad \phi=\frac{f_{\text{up}}-f_{\text{down}}}{s_{\text{up}}-s_{\text{down}}}$$

$$f_{\text{now}}=e^{-r\delta t}\left(qf_{\text{up}}+(1-q)f_{\text{down}}\right) \qquad \psi=B_{\text{now}}^{-1}\left(f_{\text{now}}-\phi s_{\text{now}}\right)$$

$$V=f(1)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$$

其中

q: 向上跳跃的套利概率	r: 时间段内的执行利率
f: 未定权益随时间的价值过程	s: 股票价格过程
ϕ: 组合中股票所占比例	B: 债券价格过程, $B_0=1$
ψ: 组合中债券所占比例	$\mathbb{Q}$: 由 qs 构成的测度
V: 未定权益在零时刻的价值	X: 未定权益的支付
δt: 时段长度	T: 未定权益支付的时刻

2.3 二项式表示定理

期望算子是一个更一般、更具建设性的算子，它不仅局限于传统的概率意义. 我们可以很自然地联想到存在着一个定理，该定理证实存在 q_j 的某个集合，使得任何衍生品都可以用关于这个概率分布的贴现期望算子来定价. 有了二叉树模型，我们可以将离散模型过渡到连续模型. 从形式上来看这有些奇怪，但任何启示都很珍贵，在因为在连续模型中，直觉往往是错的. 事情还没有完. 很容易将期望算子的结论推广到连续的情况.

[28] 二项式表示定理正来自于这样一种思想.

2.3.1 图解定义

首先必须对一些概念给出严格的定义. 以前也遇到过这些概念，不过定义上不太严格. 一共有7个独立的概念，我们对每一个将配上有7个节点的两步过程的二叉树，予以补充说明（图2-8）.

(i) 我们称股票可能的价格的集合（每个价格对应树的一个节点）以及它们之间的连接，称之为过程（process）S. 如图2-9为树上的一个可能的价格过程 S. 随机变量 S_i 表示过程在时刻 i 的值. 例如，根据是处于节点2还是处于3，S_1 分别取值为60或120.

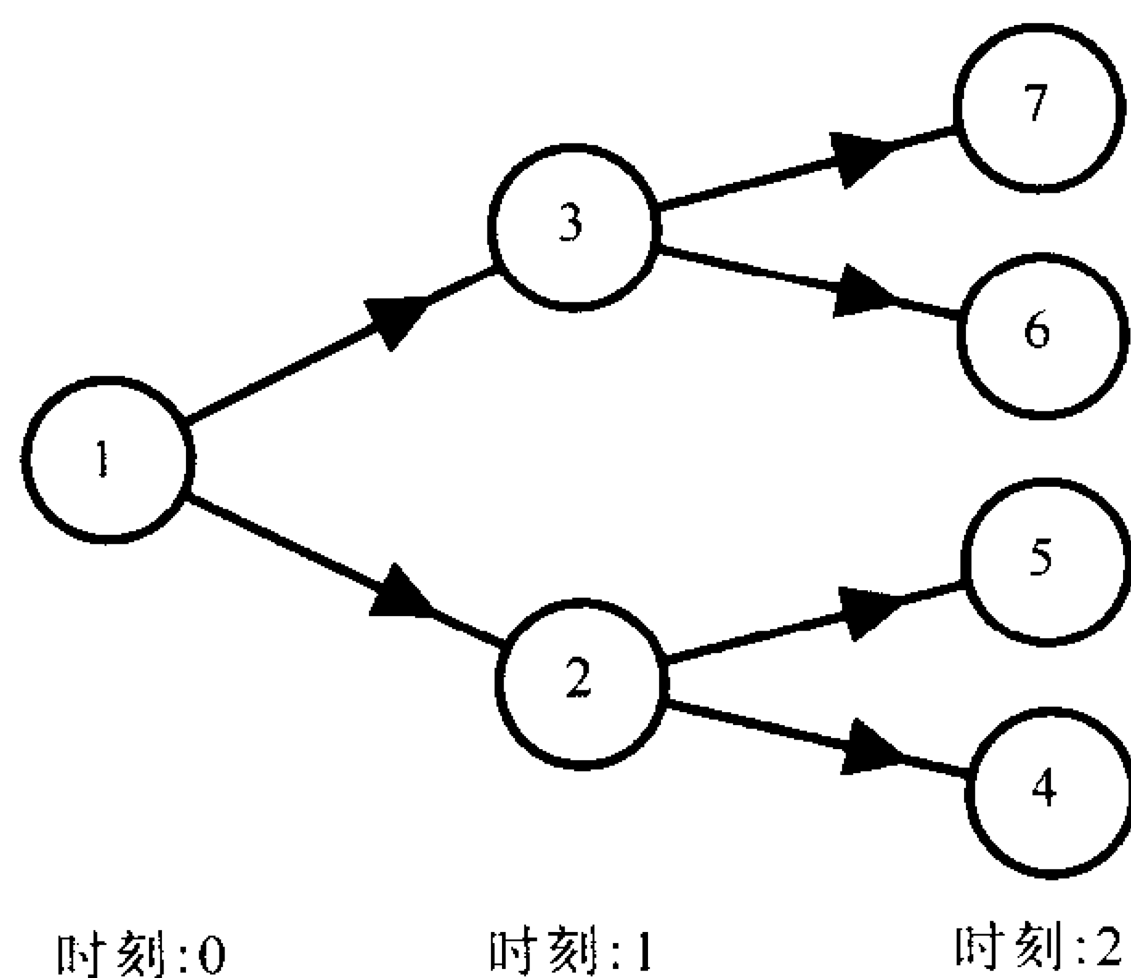


图2-8 标注节点数的二叉树

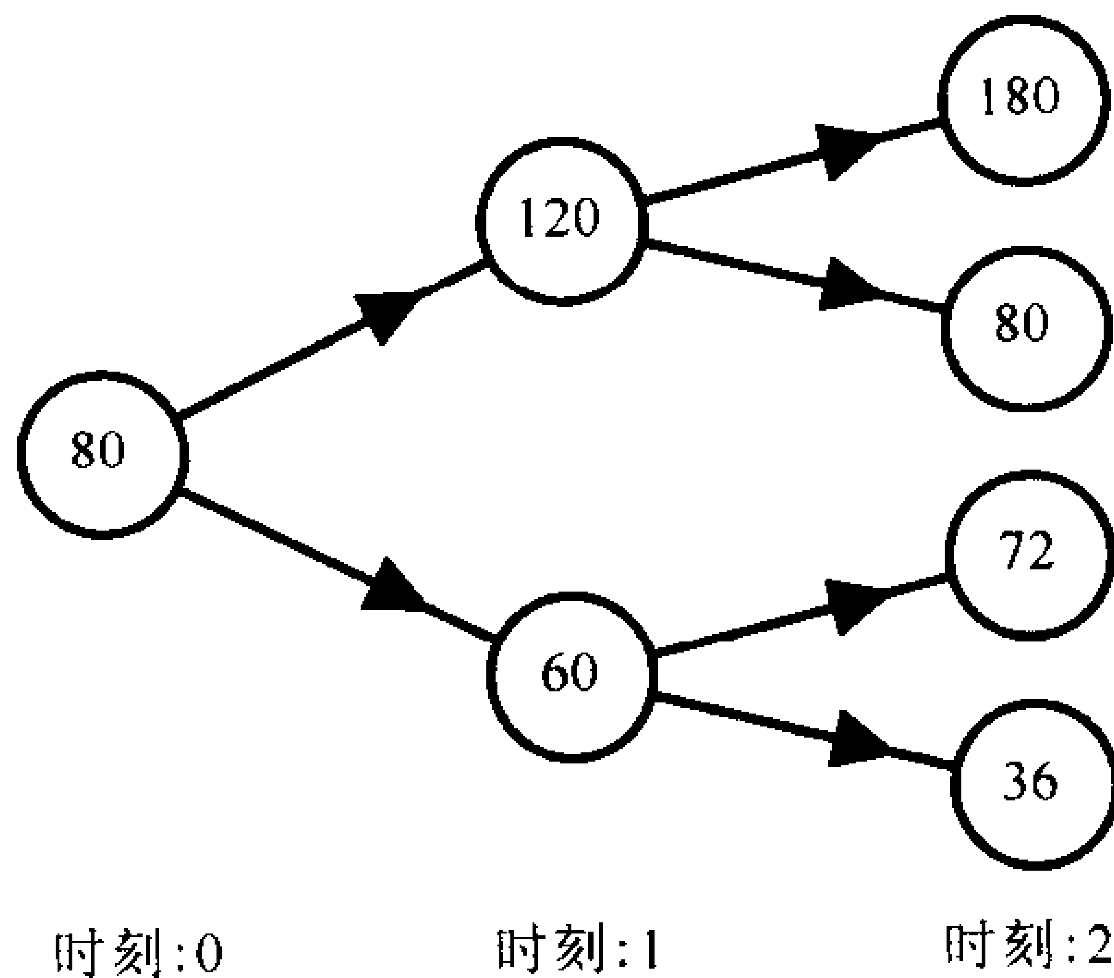


图2-9 标注价格过程的二叉树

[29] (ii) 独立于过程 S，称树上的概率集 $\{p_j\}$ 或 $\{q_j\}$ 分别为测度（measure）$\mathbb{P}$ 或 $\mathbb{Q}$. 该测度描述了每个节点向上或向下走的可能性，在节点 j 处以 p_j 表示向上的概率. 可以选择较为简单的测度$\mathbb{P}$（图2-10a）所示所有跳跃都是等概的，也可以选择更复杂一些的测度$\mathbb{Q}$（图2-10b）.

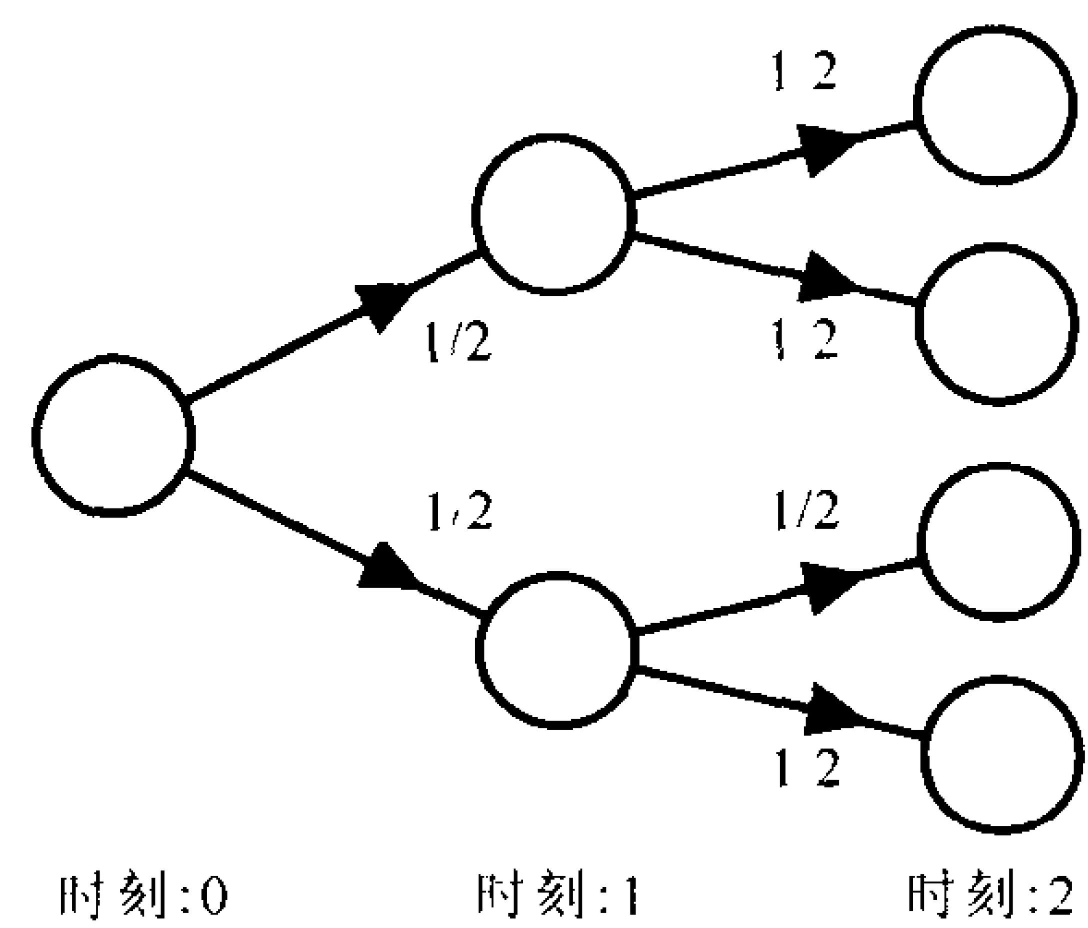


图 2-10a 测度$\mathbb{P}$

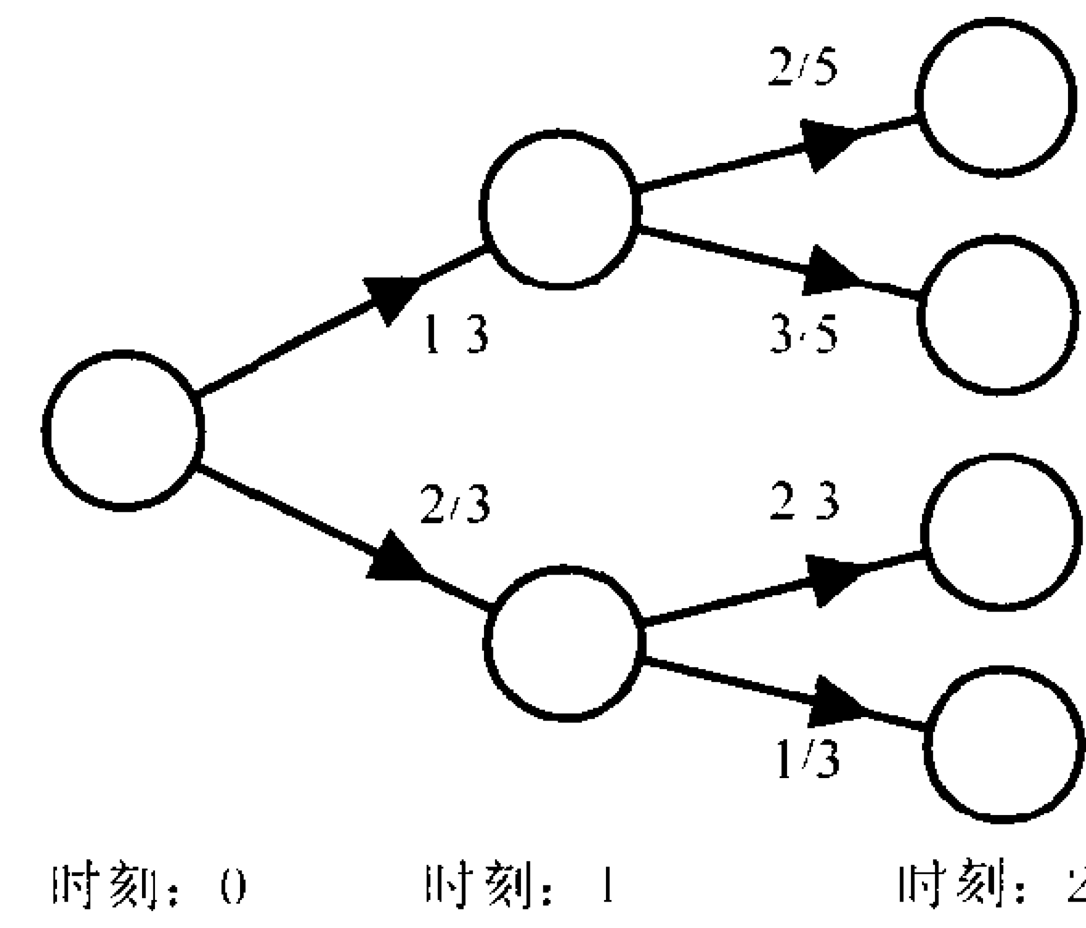


图 2-10b 测度$\mathbb{Q}$

注意，在上述系统中，可以将两个独立的成分看作一个整体中紧密联系的部分——向上运动的概率和向上运动的结果. 或者在本质上，这并没有太大的区别，但是前几章中忽略这一点，那是不明智的. 我们并不需要用现实世界中的测度$\mathbb{P}$，来寻找无风险组合的测度. 那个测度是 S 的函数而非$\mathbb{P}$ 的函数. 向上运动的幅度和相互联系会影响到衍生品的价值，而向上运动的概率却不会影响衍生品的价值.

过程和测度的分离并不是人为的，而是我们一切工作的基础. 粗略地讲，强大数定律之所以失效就是因为它将 S 和$\mathbb{P}$ 联合起来看，而非单独考虑 S 过程.

(iii) σ 域流 (filtration) ($\mathcal{F}_i$) 是到时刻 i 为止，二叉树上股价的历史. 零时刻的 σ 域 $\mathcal{F}_0$，就是单一节点 1 组成的路径，即$\mathcal{F}_0=\{1\}$. 到时刻 1，如果第一次跳跃为向下，则有$\mathcal{F}_1=\{1,2\}$，如向上，则有$\mathcal{F}_1=\{1,3\}$，具体到每个节点如表 2-3.

表 2-3 σ 域流

节点	1	2	3	4	5	6	7
σ 域	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,2,5\}$	$\{1,3,6\}$	$\{1,3,7\}$

这就对应于在时刻 i 达到一个特定的节点，为什么呢? 二叉树的结构保证了这一点. 每个节点只对应一条路径. σ 域流确定了股价变动的历史，也就确定了一个节点. 知道了 σ 域流也就知道了在二叉树上所处的位置 (至少适用于任何非重组的树).

(iv) 树上的一个未定权益 (claim) X，是关于未定权益在到期日 T 的节点的函数. 基于节点和路径的一一对应关系，也可以等价地认为，它是一个 σ 域$\mathcal{F}_T$ 的函数. 例如，在时刻 2，过程的值 S_2 是一个未定权益，比如它可以是一个敲定价为 70 的看涨期权的价值，或是在股价变化路径中出现的最大值 (表 2-4). 30

表 2-4 在时刻 2 的某些未定权益

时刻 2 的节点	S_2	$(S_2-70)^+$	$\max\{S_0,S_1,S_2\}$
7	180	110	180
6	80	10	120

续表

时刻2的节点	S_2	$(S_2-70)^+$	$\max\{S_0,S_1,S_2\}$
5	72	2	80
4	36	0	80

未定权益和一个过程之间的粗略不同在于，未定权益仅定义在时刻 T 上，而过程则定义在 T 以前的时间段上，包括 T 在内.

(v) 条件期望算子 (conditional expectation operator) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\cdot\mid\mathcal{F}_i)$，将期望算子推广到了两个参数，测度$\mathbb{Q}$ 和历史 σ 域$\mathcal{F}_i$. 可将测度$\mathbb{Q}$ 视为一概率函数，它告诉我们用哪个"概率"来确定路径—概率乃至期望. 但到目前为止，我们感兴趣的仅仅是在从零时刻开始的整条路径上的期望，然而非零时刻的任意始点以后的期望也很有用. σ 域流的引入，也正为此. 对一个未定权益 X，$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X\mid\mathcal{F}_i)$ 表示 X 以时刻 i 为起始点，在历史条件$\mathcal{F}_i$ 下，其后路径上的期望. 我们将时刻 i 所到达的节点视为新的二叉树的根节点，从那里开始求未来未定权益的期望. 条件期望强烈地依赖于 σ 域$\mathcal{F}_i$ 的值，因此它自身也是一个随机变量.

[31]

对时刻 i 的每个节点而言，$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X\mid\mathcal{F}_i)$ 就相当于，当我们已经到达那个节点后，X 的期望. 举例来说，设$\mathbb{P}$ 为图 2-10a 中的测度. 而 X 为表 2-5 中的未定权益 S_2.

显然，从根节点开始的是相同的无条件期望$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2)$，从时刻 2 往后没有未来发展，故对 σ 域$\mathcal{F}_2$ 任何可能的值，都有$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2\mid\mathcal{F}_2)=S_2$.

我们还可以将$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X\mid\mathcal{F}_i)$看作随时刻 i 变化的过程. 在 $X=S_2$ 的情形可参照图 2-11. 由此我们可以在给定一个测度后，将一个未定权益转化为一个过程.

表 2-5　关于 σ 域流的条件期望

期　望	σ 域流值	价　值
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2\mid\mathcal{F}_0)$	$\{1\}$	$(180+80+72+36)/4=92$
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2\mid\mathcal{F}_1)$	$\{1,3\}$	$\frac{1}{2}(180+80)=130$
	$\{1,2\}$	$\frac{1}{2}(72+36)=54$
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2\mid\mathcal{F}_2)$	$\{1,3,7\}$	180
	$\{1,3,6\}$	80
	$\{1,2,5\}$	72
	$\{1,2,4\}$	36

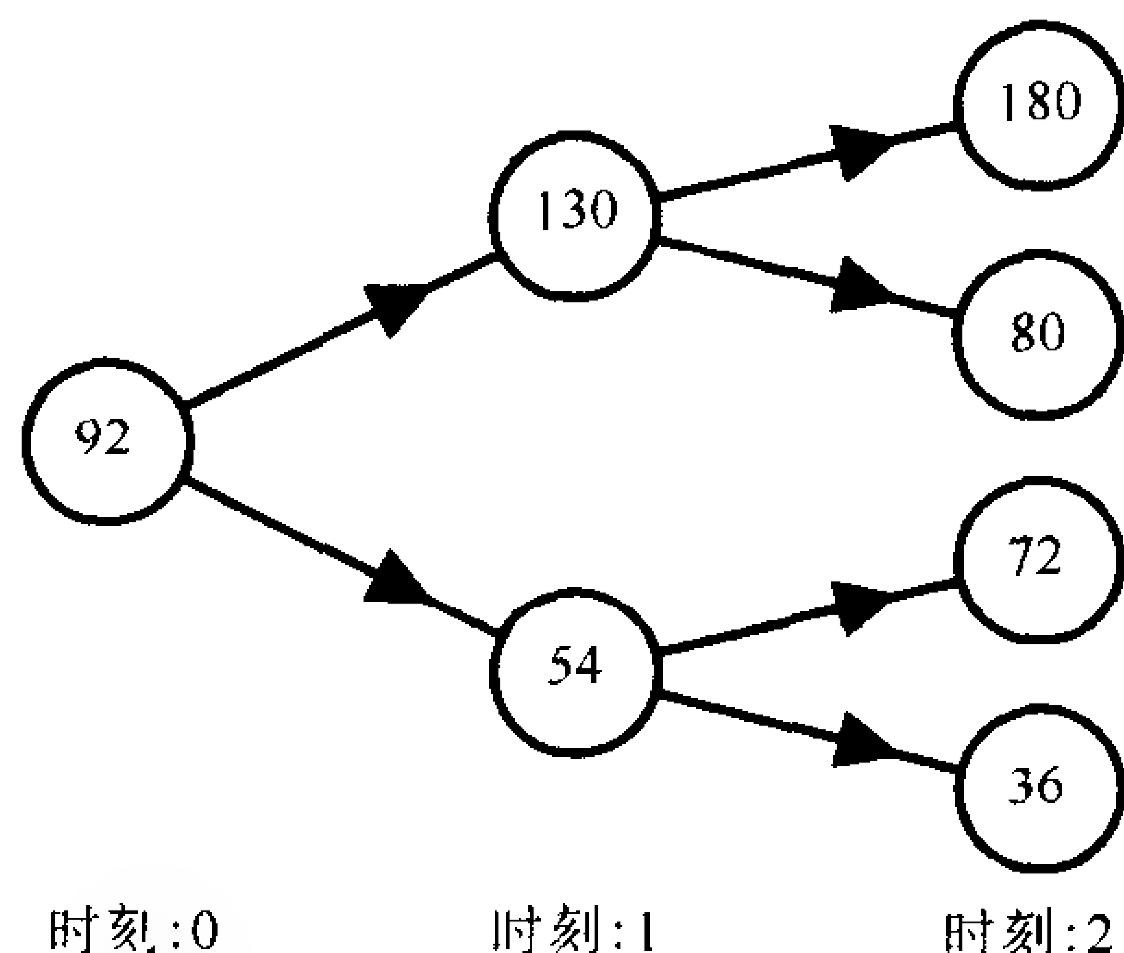


图 2-11 条件期望过程$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2 | \mathcal{F}_i)$

(vi) 一个可料过程(previsible process) $\phi = \phi_i$ 是定义在同一棵二叉树上的过程,它在时刻 i 任意给定的节点上的值都只依赖于直到前一时刻 $i-1$ 的历史$\mathcal{F}_{i-1}$. 可料过程有什么特性呢?它将二叉树的历史和节点一一对应起来,当然它本身也是一个二叉树过程,它在零时刻后各个节点的值也已有定义. 与主过程 S 不同的是,可料过程的值提前一个节点就知道了. 这并不意味着直到它们发生后的下一时刻前才注意到分叉. 例如,一个随机的债券过程是可料过程,因为它滞后的价格过程 $\phi_i = S_{i-1}$, $i \geqslant 1$ (图 2-12). 有时没有必要定义可料过程在零点的值. 在我们不能预知价格如何走向时,可料过程可以起交易策略的作用. 这是任何排除套利(或内部交易)的模型的一个重要性质. 32

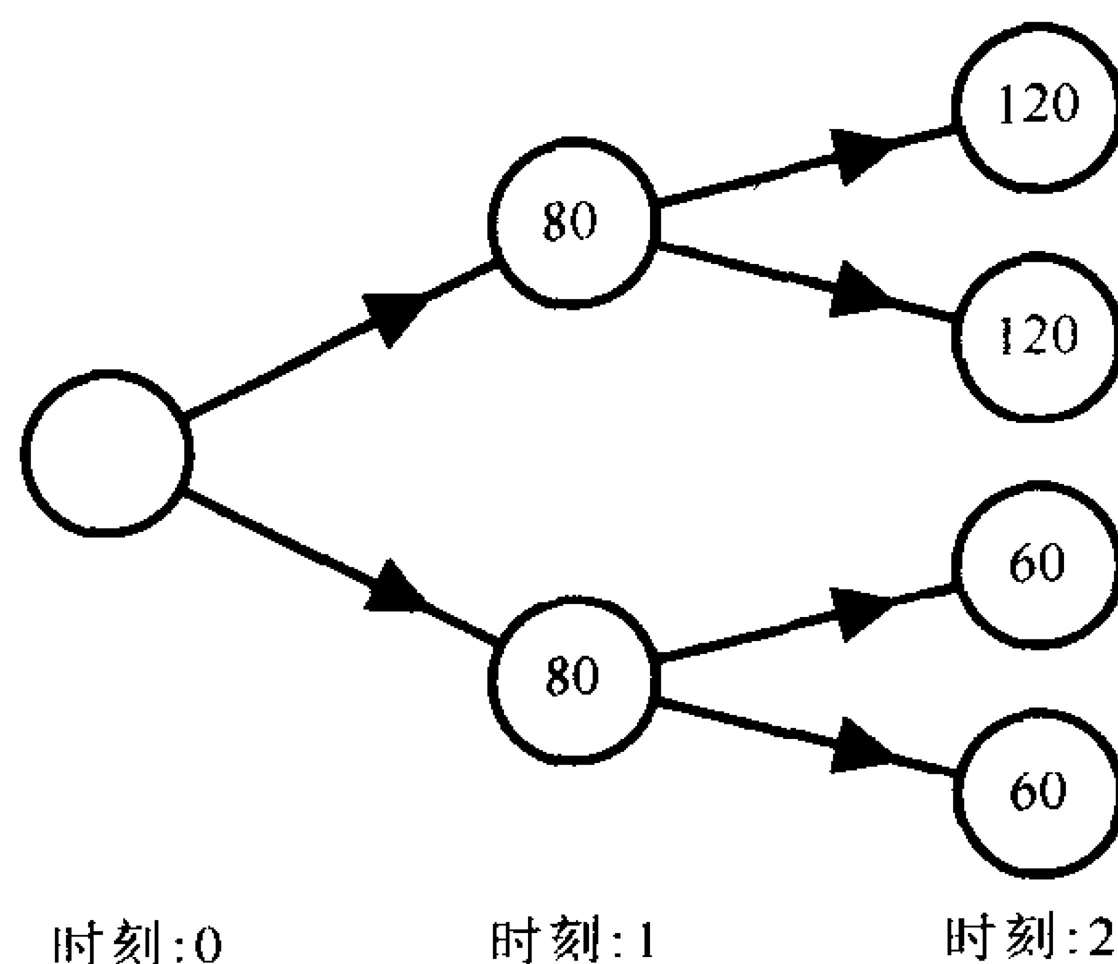


图 2-12 可料过程 S_{i-1}

最后一个定义,或许是所有定义中最重要的一个,回答的是下面一个问题:什么是无风险复制测度呢?它是特别为目前的任务而定义的,还是在其他某些方面也有特殊意义呢?

(vii) 称过程 S 为一个关于测度$\mathbb{P}$ 以及 σ 域流 $(\mathcal{F}_i)$ 的鞅(martingale),如果

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_j | \mathcal{F}_i) = S_i, \text{ 对所有的 } i \leqslant j$$

该式子可以理解为若 S 在测度$\mathbb{P}$ 下为一个鞅,表示基于时刻 i 的历史,在测度$\mathbb{P}$ 下(我们显然需要一个测度来讨论正式的期望,否则毫无意义)过程 S 在时刻 j 的未来的期望值就是过程在时刻 i 的值.

本质上，过程 S 在测度$\mathbb{P}$ 下没有漂移项，在期望算子$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ 下没有上下偏移. 如果过程在某个时刻的值为 100，那么在$\mathbb{P}$ 下此时的条件期望值就是 100.

例 (1) 平凡的例子：取常值的过程，在任何可能的测度下，都是一个鞅.

33

例 (2) 图 2-10b 中所示的过程 S 就是在测度$\mathbb{Q}$ 下的一个鞅. 比如，$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_1 \mid \mathcal{F}_0)$ 等于 $\frac{1}{3}\times 120+\frac{2}{3}\times 60=80$，而 80 正是 S_0 的值. 更复杂一点，如果第一次跳跃为向上的话，$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_1)$等于$\frac{2}{5}\times 180+\frac{3}{5}\times 80=120$，同样也就是第一个跳跃向上后 S_1 的值. 向下跳跃以及其他情况也都可以分别一一检验之.

例 (3) 条件期望过程 $N_i=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_2 \mid \mathcal{F}_i)$为一个$\mathbb{P}$-鞅. 由定义，我们只要验证$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_1 \mid \mathcal{F}_0)$等于 N_0. 此即，$\frac{1}{2}\times 130+\frac{1}{2}\times 54=92$.

其中最后一个例子，为一个普遍结论的特例.

未定权益的条件期望过程

对于任何一个未定权益 X，过程$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_i)$始终是一个$\mathbb{P}$-鞅.

为了证明这一点，要用到下面一个公式，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_j) \mid \mathcal{F}_i)=\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_i),\text{对 } i\leqslant j.$$

换句话说，先基于到时刻 j 的历史，再基于到更早的时刻 i 的历史，就相当于直接基于到时刻 i 的历史. 这就是所谓的塔形定律.

在这条定律下，要验证一个过程是否为$\mathbb{P}$-鞅过程，只要将 S_i 与它最终值的条件期望$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_T \mid \mathcal{F}_i)$相比较. 如果一致，则该过程为一个$\mathbb{P}$-鞅.

我们应当慎重地看待对$\mathbb{P}$ 的依赖性. 过程 S 本身不能成为一个鞅，而是一个在测度$\mathbb{P}$ 下的鞅，一个$\mathbb{P}$-鞅. 当然，同一个过程可能对某个测度而言是鞅，对另外一个测度则不是. 例如，我们用来举例的过程 S 就不是一个$\mathbb{P}$-鞅（因为图 2-9 与图 2-11 是不同的），但它是一个$\mathbb{Q}$-鞅，其中测度$\mathbb{Q}$ 由图 2-10b 给出. 这样的一个测度$\mathbb{Q}$，就称为过程 S 的鞅测度.

习题

34

2.3　验证$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_i)$等于 S_i，从而证明 S 是一个$\mathbb{Q}$-鞅.

2.3.2　二项式表示定理

现在我们可以写出这个定理了.

二项式表示定理

假设测度$\mathbb{Q}$ 使二叉树价格过程 S 是一个$\mathbb{Q}$-鞅. 如果 N 为另外一个$\mathbb{Q}$-鞅，则存在一个可料过程 ϕ，使得

$$N_i = N_0 + \sum_{k=1}^{i} \phi_k \Delta S_k,$$

其中，$\Delta S_i := S_i - S_{i-1}$ 为 S 从时刻 $i-1$ 到时刻 i 的变化量，ϕ_i 为 ϕ 在时刻 i 相应节点的值.

从 N_0 到 N_i 的值可以在相应时刻的前一步知道. 利用我们事先已经做好的铺垫工作，我们可以用形式的但直观的方法来证明该定理. 以后我们对此类操作应习以为常.

考察从时刻 $i-1$ 的一个节点向上或向下运动到时刻 i 的两个节点组成的单个分叉. 树的结构保证了在$\mathcal{F}_{i-1}$之后，$\mathcal{F}_i$ 有两种选择，分别对应于向上或向下跳跃. 过程 S 和过程 N 在分支上的增量分别为：

$$\Delta S_i = S_i - S_{i-1} \qquad \text{和} \qquad \Delta N_i = N_i - N_{i-1}.$$

这些增量的可变性包含了对于分支本身几何状态的依赖（图 2-13）. 35

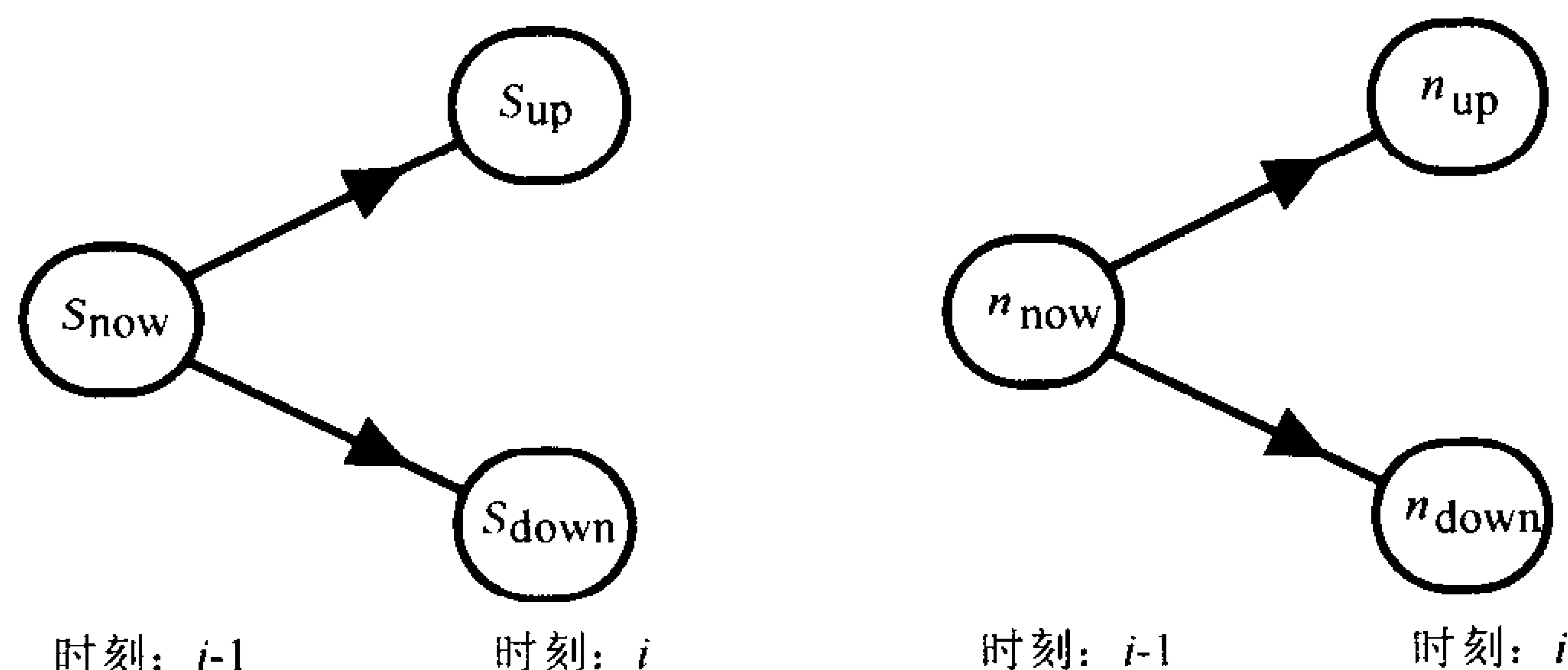


图 2-13　分叉的图形（过程 S 在左，过程 N 在右）

由于只有两个分叉，故依赖于分支的随机变量完全由其幅度和一个仅依赖于$\mathcal{F}_{i-1}$的常数偏移量所确定. 所以，如果我们想要从一个随机过程出发，建立另一个随机过程，惯用的做法是基于一个尺度变换（与幅度匹配）和一个漂移项（与偏移匹配）进行构造.

先考虑尺度. 向上和向下跳跃之间的差距幅度为：对 S 是 $\delta s_i = s_{up} - s_{down}$，对 N 是 $\delta n_i = n_{up} - n_{down}$. 两者都仅依赖于$\mathcal{F}_{i-1}$. 所以可以定义 ϕ_i 为这些分支幅度的比率，即

$$\phi_i = \frac{\delta n_i}{\delta s_i}.$$

现在再来看漂移项. N 的增量 ΔN_i 应等于尺度增量 $\phi_i \Delta S_i$ 加上一个偏移项 k，这个 k 仍然仅依赖于$\mathcal{F}_{i-1}$，即

$$\Delta N_i = \phi_i \Delta S_i + k,\ \text{对由}\mathcal{F}_{i-1}\text{可知的}\ \phi_i\ \text{和}\ k$$

但是 S 与 N 都是$\mathbb{Q}$-鞅，即$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Delta N_i | \mathcal{F}_{i-1})$和$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\Delta S_i | \mathcal{F}_{i-1})$都为零，即增量在历史$\mathcal{F}_{i-1}$下的条件期望为零. 比例因子 ϕ_i 为可料的，因为它在时刻 $i-1$ 就可以知道，因此可推出$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\phi_i \Delta S_i | \mathcal{F}_{i-1}) = 0$，偏移项 k 一定也为零（$0 = 0 + k$）.

所以，一般的尺度和漂移项在 S 和 N 都是$\mathbb{Q}$-鞅的情形下只有一个尺度变化：

$$\Delta N_i = \phi_i \Delta S_i.$$

将所有这些增量归纳起来，就给出最终我们想要的结果.

2.3.3　在金融中的应用

上述的定理只是一个关于二叉树过程和测度的正式的定理，在我们的证明中，既没有考虑股票和债券的资产组合，也没有考虑套利或市场应用. 在2.2节中，我们经历了很多与此类似的步骤，但是还没有形成一个金融的结论. 那么怎样将二项式表示定理用于定价呢？

36

在市场的二叉树模型中，股票服从于一个二叉树过程 S. 如果存在一个测度 $\mathbb{Q}$，使得 S 在 $\mathbb{Q}$ 下为一个鞅，就可以应用表示定理，用股票价格来表示另外一个鞅 N_i. 定理中的可料过程 ϕ 可以视为复制策略. 在每个节点可以买入适当的 ϕ_i 份股票，并以鞅 N_i 来确定收益和损失.

我们可以一步一步地将鞅与实际匹配起来，从起始处开始，在结束处完成，细化到各个地方. 如果鞅最后以一个未定权益结束，那么就合成了这个未定权益.

当然，还有两个未尽之事. 首先，我们有了一个未定权益 X，但未必是一个鞅. 虽然希望能以一个未定权益结束，但是未定权益未必如期出现. 它不是一个过程，而是个随机变量. 其次，除了股票，还要考虑一个现金债券. 直觉告诉我们，二项式表示定理中的 ϕ_i 将在正式的复制策略中发挥巨大的作用，但根据前面的记号，还需有一个 ψ_i，对股票的持有必伴随对债券的持有.

首先，未定权益 X 是一个随机变量，但前面已叙述了将随机变量转换成过程的一个技巧. 给定任何测度 $\mathbb{Q}$，可用条件期望算子来构造过程

$$E_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_i).$$

更妙的是，就像我们已观察到的那样，无论选取什么测度 $\mathbb{Q}$，E_i 都自动地是一个 $\mathbb{Q}$-鞅. 因此，如果选取了 $\mathbb{Q}$ 使 S_i 为一个 $\mathbb{Q}$-鞅，则适当的 E_i 也同样是一个 $\mathbb{Q}$-鞅.

现金债券又如何呢？最终不得不进行略为繁琐的计算，但是直觉能告诉我们答案可能是什么. 现金债券 B_i 代表了货币的增长——今天的 \$1 与时刻 i 的 \$1 是不相同的，事情都是相当的，今天的1美元就相当时刻 i 的 B_i 美元. 但是，我们希望在一个没有货币增长的市场中考虑问题，于是可以简单地将这个因子去掉.

债券过程 B_i 是正的，可料的. 不失一般性，可设 $B_0 = 1$.

37

(i) 就像 B_i 本身一样，过程 B_i^{-1} 是另一个可料过程，称为贴现过程（discount process）.

(ii) 定义 $Z_i := B_i^{-1} S_i$，该过程就像已经定义过的 S 一样，共存于同一棵二叉树上，称为贴现的股价过程（discounted stock process）.

(iii) 价值 $B_T^{-1} X$ 也是一个未定权益，由于它是 Z 到 S 上的简单映射，就如 S 一样，$B_T^{-1} X$ 为 Z 上的一个未定权益，称为贴现的未定权益（discounted claim）.

接下来是什么呢？

2.3.4 复制策略

下面将解决这个难题，有了测度$\mathbb{Q}$，使 Z 成为一个$\mathbb{Q}$-鞅，又有了未定权益 X，则可由 $B_T^{-1}X$ 通过求条件期望得到一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，$E_i=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_i)$．由二项式表示定理，存在一个可料过程 ϕ 满足，

$$E_i = E_0 + \sum_{k=1}^{i} \phi_k \Delta Z_k.$$

现在考虑以下的复制策略：在时刻 i，买入证券组合 Π_i，包含

- ϕ_{i+1}单位的股票 S，
- $\psi_{i+1}=(E_i-\phi_{i+1}B_i^{-1}S_i)$单位的现金债券.

在初始的零时刻，Π_0 等于 $\phi_1S_0+\psi_1B_0=E_0=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$，即建立该组合的成本．由于 ϕ 和 ψ 为可料过程，同样易得 ϕ_1 和 ψ_1.

那么下一个时刻会怎样呢？在两个时刻之间所持有的安全组合在下一时刻的那一瞬间它的价值就发生了变化，Π_0 的价值变为

$$\phi_1 S_1 + \psi_1 B_1 = B_1(E_0 + \phi_1(B_1^{-1}S_1 - B_0^{-1}S_0)),$$

而 $B_1^{-1}S_1-B_0^{-1}S_0=\Delta Z_1$．现在可以应用二项式表示定理来化简上面的表达式：在时刻 1，Π_0 的价值就等于 B_1E_1.

在时刻 1 的复制策略是买入新的组合 Π_1．无论 S 怎样变化，也就是说无论 σ 域$\mathcal{F}_1$ 实际包含什么，组合 Π_1 的成本都正好等于前面算出的结果：B_1E_1.

因此，我们可以兑现 Π_0 来得到 Π_1．依此类推，在时刻 i，组合 Π_i 的买入成本为 B_iE_i，到时刻 $i+1$ 则变为 $B_{i+1}E_{i+1}$，即下一个新组合的成本．这种复制策略称为自融资的（self-financing）．最终，在时刻 T 结束的自融资策略 Π_{T-1}的价值，就是 $B_TB_T^{-1}X$，也就是我们想要得到的未定权益 X. [38]

2.3.5 套利

显然未定权益 X 的价格为$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$——在鞅测度$\mathbb{Q}$ 下关于贴现股票 Z，贴现的未定权益的期望值．而且它是套利价格，因为对任何其他价格，只要适当的应用策略(ϕ_i,ψ_i)来复制未定权益都能挖掘出无成本的收益．大可不必对此吃惊——只要简单重复 2.2 节中的过程即可．但是通过正式的讨论，已经让我们对整个过程有了一个总的概念和一些重要的结论.

2.3.6 自融资过程的存在性

第一个结论是，在二叉树模型中，可以创建一个自融资策略来复制任何未定权益．自融资确切的含义是什么呢？设定交易策略在时刻 i 的价值为 V_i，令它为时刻 i 证券组合 Π_i 的初始价值，即 $V_i=\phi_{i+1}S_i+\psi_{i+1}B_i$．称这个策略是自融资的，如果证券组合 Π_{i-1}在时刻 i

结束时的值正好等于 V_i. 用符号表示的话，在交易策略中融资的缺口

$$D_i = V_i - \phi_i S_i - \psi_i B_i$$

必须为零.

另一种表示自融资策略的性质的方法，来自策略价值过程的变化 $\Delta V_i = V_i - V_{i-1}$,

$$\Delta V_i = \phi_i \Delta S_i + \psi_i \Delta B_i + D_i$$

在时刻 i 资金缺口 D_i 为零，当且仅当从时刻 $i-1$ 到时刻 i 策略的价值变化，仅仅取决于股票和债券的价值变化.

39

正式地说：

自融资套期保值策略

给定一个有一种股票 S 和债券 B 的市场的二叉树模型，称(ϕ_i, ψ_i)为一个可复制一个未定权益 X 的自融资策略，如果：

（i） ϕ 和 ψ 都是可料的；

（ii） 由复制策略定义的证券组合的价值 V 的变化遵循以下差分方程

$$\Delta V_i = \phi_i \Delta S_i + \psi_i \Delta B_i.$$

其中 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$ 为时刻 $i-1$ 到时刻 i 的股价变化，而 $\Delta B_i = B_i - B_{i-1}$ 为相应的 B 的变化；

（iii） $\phi_T S_T + \psi_T B_T$ 就等于未定权益 X.

2.3.7　贴现的未定权益在鞅测度下的期望

第二条结论是，二叉树模型中，任何衍生品的价格都是贴现的未定权益在测度$\mathbb{Q}$下的期望，其中测度$\mathbb{Q}$使贴现的股票过程成为一个鞅.

期权定价公式（离散情形）

一个到期日为 T 的未定权益 X 在时刻 i 的价值为

$$B_i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X | \mathcal{F}_i).$$

为什么？准确地说，因为由二项式表示定理给出一个自融资策略，要求从这个值开始，最终在 T 时刻达到未定权益，而没有风险.

2.3.8　$\mathbb{Q}$ 的存在性和惟一性

回顾一下可得到以下结论，在离散情形下，对于任何敏感的股票过程 S，都存在一个惟一的鞅测度$\mathbb{Q}$，使得贴现的股票过程 $B_i^{-1} S_i$ 为一个$\mathbb{Q}$-鞅.

40

2.3.9 结论

现在将结束对离散模型的讨论，我们已经得到了所需的一般的定理. 任何基于股票的未定权益都隐含着，与任何时刻标的股票价值相联系的衍生产品，通过复制策略给出了这个衍生品的套利价格. 如果市场上的任何玩家想要打破该策略，就会提供他人以套利财富. 套利价格为贴现的未定权益的期望，且仅仅是在一个特殊的测度$\mathbb{Q}$下的期望，该测度使贴现后的股票过程为一个鞅. S所服从的真实的测度$\mathbb{P}$是与之不相关的. 复制的策略为一个自融资策略，无论S怎样变化都能生成该未定权益.

2.4 对连续模型的启示

在离散模型的启发下，来看看连续时间情形是怎样的. 不十分严格地说，缩短离散模型的时间间隔，可以逼近连续模型. 事实上，可以证明，一个含固定增长率和噪声常数的自然离散模型，在原来的测度$\mathbb{P}$和鞅测度$\mathbb{Q}$下，可以逼近一个对数正态分布. 它还可以引申出 Black-Scholes 期权定价公式. 在下一章节的末尾我们给出其严格证明.

2.4.1 带常值股票增长和噪声的模型

模型以时间间隔δt为参数，当它越来越短时，模型就会越接近一个连续时间模型. 另外还有三个给定的常数参数：噪声特性σ，股票增长率μ以及无风险利率r.

现金债券B_t有简单的形式$B_t = \exp(rt)$，与时间间隔长度无关.

股票过程建立在一棵重组二叉树的节点上，从某个特定节点的值s出发，沿着下一个向上或者向下的分支，达到新的价值

$$\begin{cases} s\ \exp(\mu\ \delta t + \sigma\ \sqrt{\delta t}) & \text{如果向上,} \\ s\ \exp(\mu\ \delta t - \sigma\ \sqrt{\delta t}) & \text{如果向下.} \end{cases}$$

41

上跳或者下降的概率相同，处处都是$p = 1/2$.

对于一个固定时间t，如果设定到t为止共有n个时刻，则$n = t/\delta t$，且有

$$S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma\sqrt{t}\left(\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

其中X_n为n次独立的跳跃中向上的次数. 从而随机变量X_n服从均值为$n/2$，方差为$n/4$的二项式分布，故$(2X_n - n)/\sqrt{n}$的均值为0，方差为1. 由中心极限定理，这种分布将收敛到一个均值为0方差为1的正态分布. 于是，当δt变小而n变大时，S_t的分布就趋向一个对数正态分布. 换言之，$\log S_t$服从均值为$\log S_0 + \mu t$、方差为$\sigma^2 t$的正态分布.

2.4.2 在鞅测度下

以上是在测度$\mathbb{P}$下的情况，那么在测度$\mathbb{Q}$下呢?

根据我们的公式，鞅测度的概率q为

$$q = \frac{s\exp(r\delta t) - s_{\mathrm{down}}}{s_{\mathrm{up}} - s_{\mathrm{down}}}.$$

可以求得q的近似公式

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\delta t}\left(\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma}\right)\right).$$

因此在$\mathbb{Q}$下，X_n仍服从二项式分布，但是此时均值为nq，方差为$nq(1-q)$.

也就是说，$(2X_n - n)/\sqrt{n}$的均值为$-\sqrt{t}(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)/\sigma$，方差渐近趋向于1. 再次运用中心极限定理得，它收敛到一个具有相同均值和方差为1的正态随机变量. 相应地S_t仍服从对数正态分布，$\log S_t$的均值为$\log S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$，方差为$\sigma^2 t$，可以表示为

$$S_t = S_0\exp\left(\sigma\sqrt{t}Z + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right),$$

[42] 其中，Z在测度$\mathbb{Q}$下服从正态$N(0,1)$分布. 此时我们已找到在鞅测度$\mathbb{Q}$下S_t的边际分布.

2.4.3 看涨期权的定价

如果X为到期日为T、敲定价为k的看涨期权，就有$X = (S_T - k)^+$，则它在零时刻的价值为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_0\exp(\sigma\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma^2 T) - k\exp(-rT))^+\right].$$

在第3章中，会发现它就等于下式

$$S_0\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_0}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right),$$

其中，Φ为正态分布函数$\Phi(x) = \mathbb{Q}(Z \leqslant x)$，这就是 Black-Scholes 公式了. 我们将在下一章中证明之.

[43]

第3章 连续过程

股票价格不是树．上一章中讲的离散树仅仅是股票价格实际波动在形式上的一个逼近．在实际中，股票价格在任何瞬间都可能改变，而不是只在重新平衡投资组合时的某些固定的时刻变化．对于一个仅仅有向上或向下的跳而言，当跳跃时间间隔越来越短，得到的树会有越来越多和越来越短的分支，二元选择就变得很复杂．这样的树长得太复杂了，以至于我们看不到整个树干了．

在连续领域内，我们必须从头开始．离散模型对我们有所启示——从那里得到的灵感很有帮助．但是，基于令 δt 趋于0的极限讨论将变得很危险而不能严格地使用．我们将得到一个鞅表示定理，它是无风险复制的基础，并且它也为一个鞅测度，为正确运用期望算子做准备．直观上我们很难将过程和测度分开来，此时需要用到微积分的知识．测度变换在很大程度上影响一个过程．我们不能在更一般的意义下进行下去——我们将着重考虑 Brown 运动和与其相关的东西．如果要在这一章中指出一个最值得称道的基本原理的话，那么它就是 Brown 运动的完善性足可以生成我们感兴趣模型，它又是足够简单和易于处理的．在对连续过程工作的微妙之处进行了解之后，那么对于我们而言，一个建立在 Brown 运动上的简单积分就足以解决问题了．

44

3.1 连续过程

我们需要随机性．在离散的股票价格模型中，我们没有用到熟悉的随机过程，而仅仅局限于二叉树上．我们是从简单的模型入手，希望从基本材料中来构造（可做适当调整）足够复杂的市场模型．单纯的二项式分叉是构造“现实”市场的基础．在连续领域中，我们也需要一个类似的基础——简单，却能作为现实的一个合理的出发点．

什么是连续过程？这里共有三方面的法则．首先，它的值在任何时刻都可以改变，并且随着时间的变化而变化；其次，它的实际取值可以表示成任意细分的数——即取值可以为任意实数；最后，这个过程是连续变化的——其值不能有瞬时的跳跃．换句话说，如果其值从1变到了1.05，那么，它必定经过了两者之间的所有数，尽管很快．

至少作为出发点我们可以认为股票市场指数或单个证券的价格就有这样的行为．尽管它们波动急剧，但是说它们没有连续过程的行为也不是很现实．

早在1900年，Bachelier 就分析了巴黎股票交易的运动．后来人们又进一步研究，把价格比作一个特殊的连续过程——这个过程是由气体微粒的随机运动得到，或者称为 Brown 运动（图3-2）．

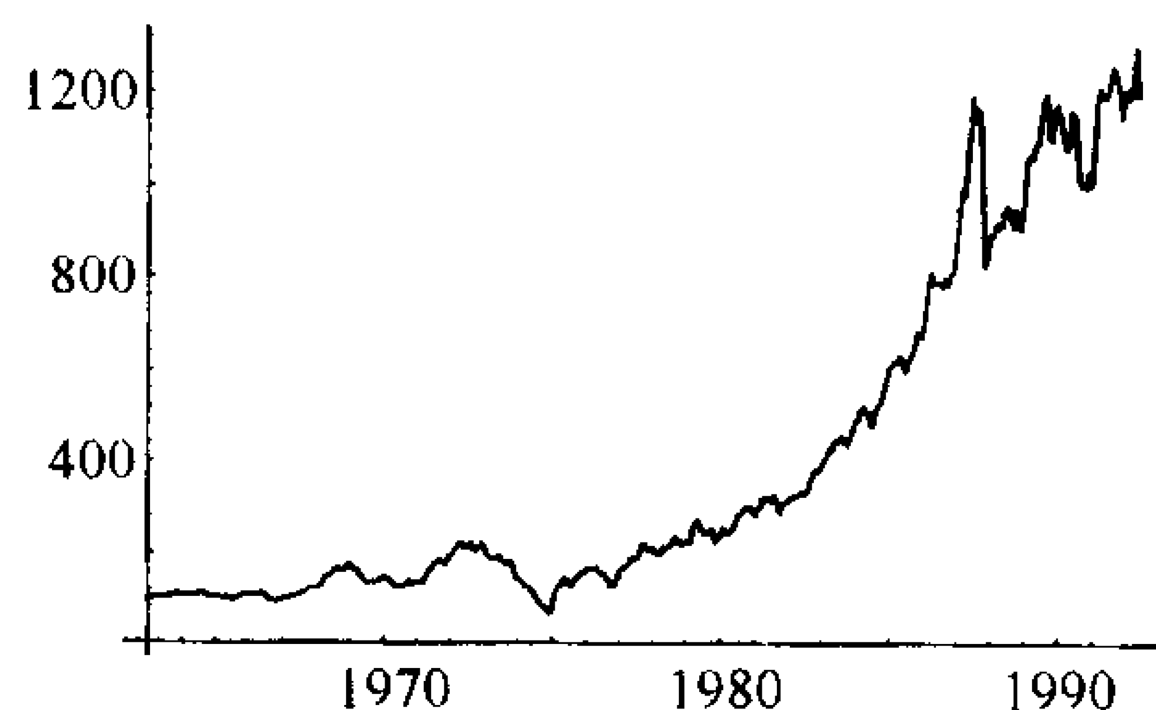


图 3-1 UK FTA 指数，1963—92



图 3-2 Brown 运动

两者有惊人的局部相似性——都有相同的凹凸不平性，并且当比例尺度有所变化时，仍有相似性，这些凹凸不平并没有变得平滑. 但是就整体而言，相似性减退，图 3-1 和图 3-2 就不一样. 直观上来说，股票指数的整体结构是不同的. 随着时间的推移，股票价格指数在增长，变得越来越"噪声化"，并且不为负值. 因此，Brown 运动不能描述整个过程.

45

但是我们只需要一个基础，单纯的二项式分叉体现不出实质，不能进一步研究. 而 Brown 运动被证实为一个构造连续过程相当有效的要素——*局部* Brown 运动比较符合实际.

3.1.1 Brown 运动

植物学家 Robert Brown 首次观察到气体微粒在连续碰撞下做不规则运动. 大概一个世纪后，此运动的数学模型才正确地发展起来. 分析 Brown 运动的第一步是构建一族特殊的过程，它们由离散二项式过程构成.

随机徘徊 $W_n(t)$

对正整数 n，定义二项式过程 $W_n(t)$：

(i) $W_n(0) = 0$,

(ii) 层距为 $1/n$,

(iii) 向上跳和向下跳的幅度相等，为 $1/\sqrt{n}$,

(iv) 测度为$\mathbb{P}$，假定向上和向下跳的概率处处相等，为 1/2.

换句话说，如果 $X_1, X_2, \cdots$ 是一列独立的二项随机变量序列，取 +1 和 −1 的概率相等，那么，W_n 在第 i 步的值定义为

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}, \qquad 对所有的 i \geqslant 1.$$

前两步见图 3-3. 当 n 变大时，W_n 将会怎样呢?

当 n 变大时，这组图像（图 3-4）不仅没有超出限制，反而稳定下来趋向于某事物. 波动幅度$\frac{1}{\sqrt{n}}$使得其在某种意义上收敛. 我们是否能作一个正式的陈述呢? 例如，我们考虑 W_n 在 1 时刻的分布：对特定的 W_n，设它可取到从 $-\sqrt{n}$到$\sqrt{n}$之间的 $n+1$ 个可能值. 但是它的

46

分布期望为零，方差为 1.（这是由于 $W_n(1)$ 为 n 个独立同分布随机变量的和，每个随机变量的期望为 0，方差为$\frac{1}{n}$.）

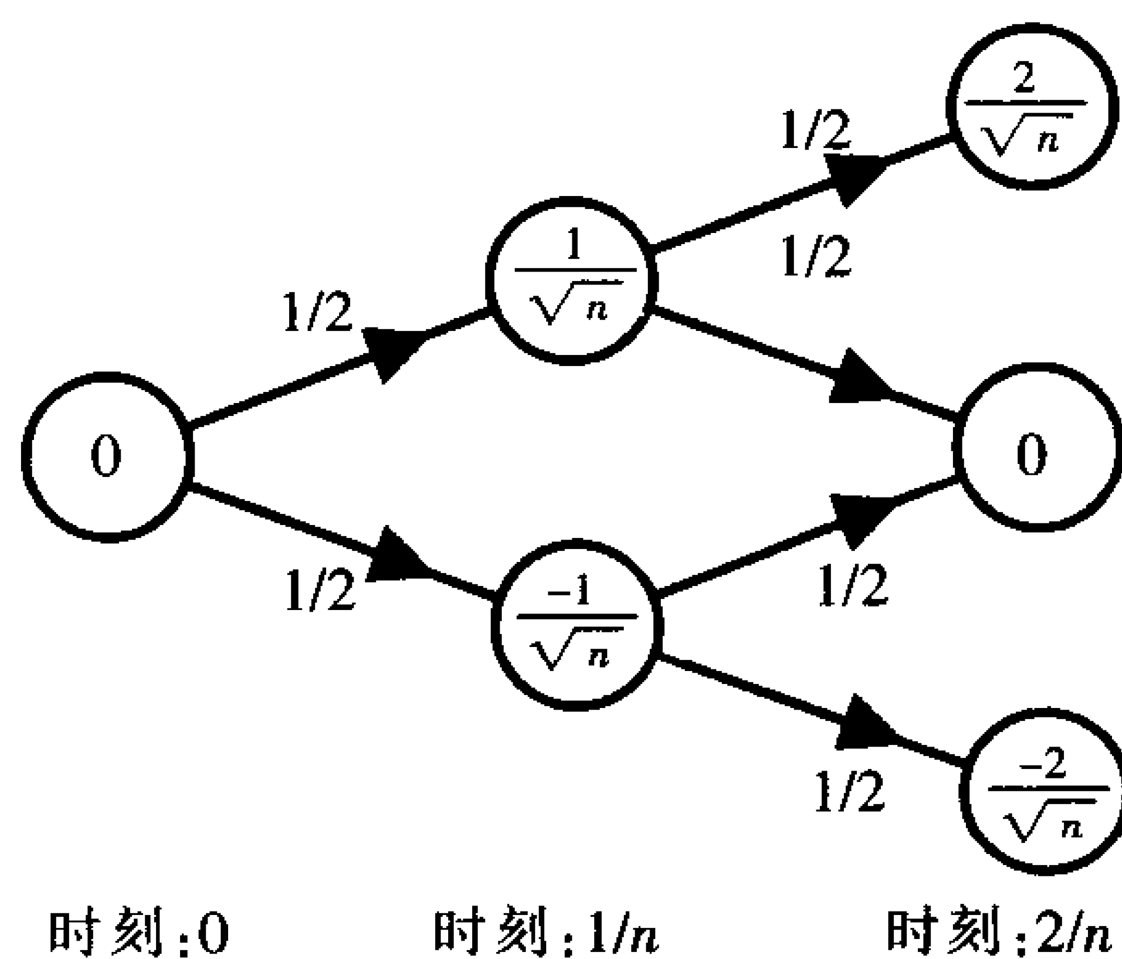


图 3-3 随机徘徊 W_n的前两步

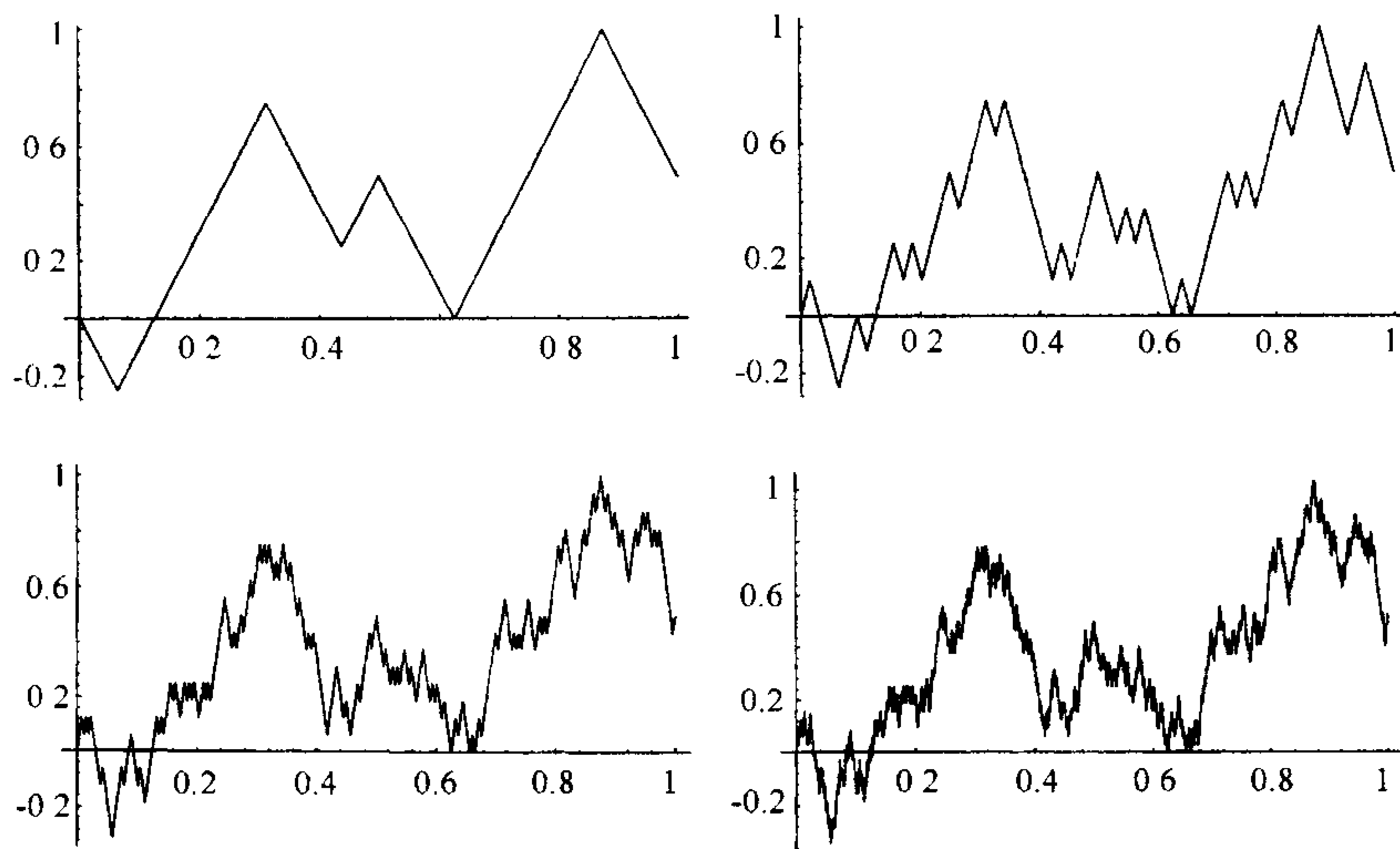


图 3-4 16, 64, 256, 1024 步相应的随机徘徊

进而，中心极限定理给出了这些两项式分布的极限. 当 n 变大时，$W_n(1)$ 的分布趋向于（标准）正态分布 $N(0,1)$. 事实上，$W_n(t)$ 的值为

47

$$W_n(t) = \sqrt{t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{nt} X_i}{\sqrt{nt}}\right).$$

由中心极限定理知，括号内分式的分布趋向于正态分布. 因此，$W_n(t)$ 的分布趋向于正态分布 $N(0,t)$.

在这一族分布中，还有一个形式上的统一，即所有的边际分布也趋向于相同的正态结构.

不仅仅是所有的边际分布如此，所有的条件边际分布也是如此. 每一个随机徘徊 W_n都具有这样的性质：从一定点出发，它未来的运动不依赖此点的位置（并且不依赖在此时刻

以前的运动). 另外，将来的位移 $W_n(s+t)-W_n(s)$ 也服从期望为0，方差为 t 的两项分布. 再一次应用中心极限定理，可得到一个相同的极限构造，他们的所有条件边际分布趋向于一个有相同期望和方差的正态分布.

边际分布收敛，条件边际分布收敛，故顺理成章可认为此过程的分布也收敛. 虽然此处我们不打算建立详细的数学框架来阐述此论断的意义，但事实上确是如此，W_n的分布收敛，并且收敛到 Brown 运动.

定义如下：

Brown 运动

一个过程 $W=(W_t:t\geqslant 0)$ 是$\mathbb{P}$-Brown 运动当且仅当

(i) W_t为连续的，并且 $W_0=0$，

(ii) 在测度$\mathbb{P}$下，W_t的分布服从正态分布 $N(0,t)$，

(iii) 在测度$\mathbb{P}$下，增量 $W_{s+t}-W_s$ 服从正态分布 $N(0,t)$，并且独立于$\mathcal{F}_s$，其中$\mathcal{F}_s$ 为直到时刻 s 为止整个过程的历史行为.

48

上述条件是过程 W 为 Brown 运动的充分必要条件. 最后一个条件尽管是离散过程 $W_n(t)$ 特性的重复，但这也是很微妙的. 许多有 $N(0,t)$ 边际分布的过程并不一定是 Brown 运动. 和离散领域中一样，在连续领域中起作用的不仅仅是边际分布（在过程在零时刻取值为0 的条件下)，还包括在$\mathcal{F}_s$ 条件下的所有边际分布. 然而事实上要检验能得到 Brown 微积分的这些条件是一项很复杂烦琐的任务.

习题

3.1　如果 Z 服从正态分布 $N(0,1)$，则过程 $X_t=\sqrt{t}Z$ 为连续的过程，且边际分布为正态分布 $N(0,t)$，那么 X 是否为一 Brown 运动?

3.2　如果 W_t和 $\tilde{W}_t$ 为两个独立的 Brown 运动，ρ 为 -1 和 1 之间的一个常数. 那么，过程 $X_t=\rho W_t+\sqrt{1-\rho^2}\,\tilde{W}_t$ 为连续过程，并且边际分布为 $N(0,t)$. X 是否为一 Brown 运动?

需要注意的是，Brown 运动很特别，下面不加证明地给出了它的一些不规则性：

- 尽管 W 处处连续，但是它（以概率 1 的）处处不可微.
- Brown 运动最终能到达任意一个实数，不管此实数有多大，或者为多么小的负数. 它可能在坐标轴上方百万个单位处，但是，在后来的某个时刻它终将（以概率 1）重新返回到 0.
- 一旦 Brown 运动到达某一点，它将很快到达此点无限多次，并且在将来也经常到达此点.
- 不管用什么尺度来研究 Brown 运动，它看起来都是一样的，Brown 运动是一个分形.

49

通常称 Brown 运动为 Wiener 过程，它是（一维的）Gauss 过程.

3.1.2　作为股票模型的 Brown 运动

如果把 Brown 运动看作为股票整体走势的模型，我们还是有所顾虑. 但是我们可以不

直接用它. Brown 运动是随机徘徊，期望为0，而在正常情况下，一个公司的股票以某一速率增长. 从历史观点来说，如果仅仅因为通货膨胀，我们希望此价格增长. 但是我们可以人为地加一个漂移. 例如，过程 $S_t = W_t + \mu t$ 就称为带漂移的 Brown 运动，其中，μ 为某常数，它反映固定的增长.

如果看起来干扰太多，或者干扰不够大，我们可以用一因子来改变 Brown 运动的尺度. 例如，$S_t = \sigma W_t + \mu t$，σ 为一常数，称为干扰因子.

看看模型使用的效果. 考虑图 3-5 中所给的股票市场的数据. 我们可以估计 σ 和 μ 使之拟合得最好（在本例中 $\sigma = 91.3$，$\mu = 37.8$），以此来模拟一个样本轨道.

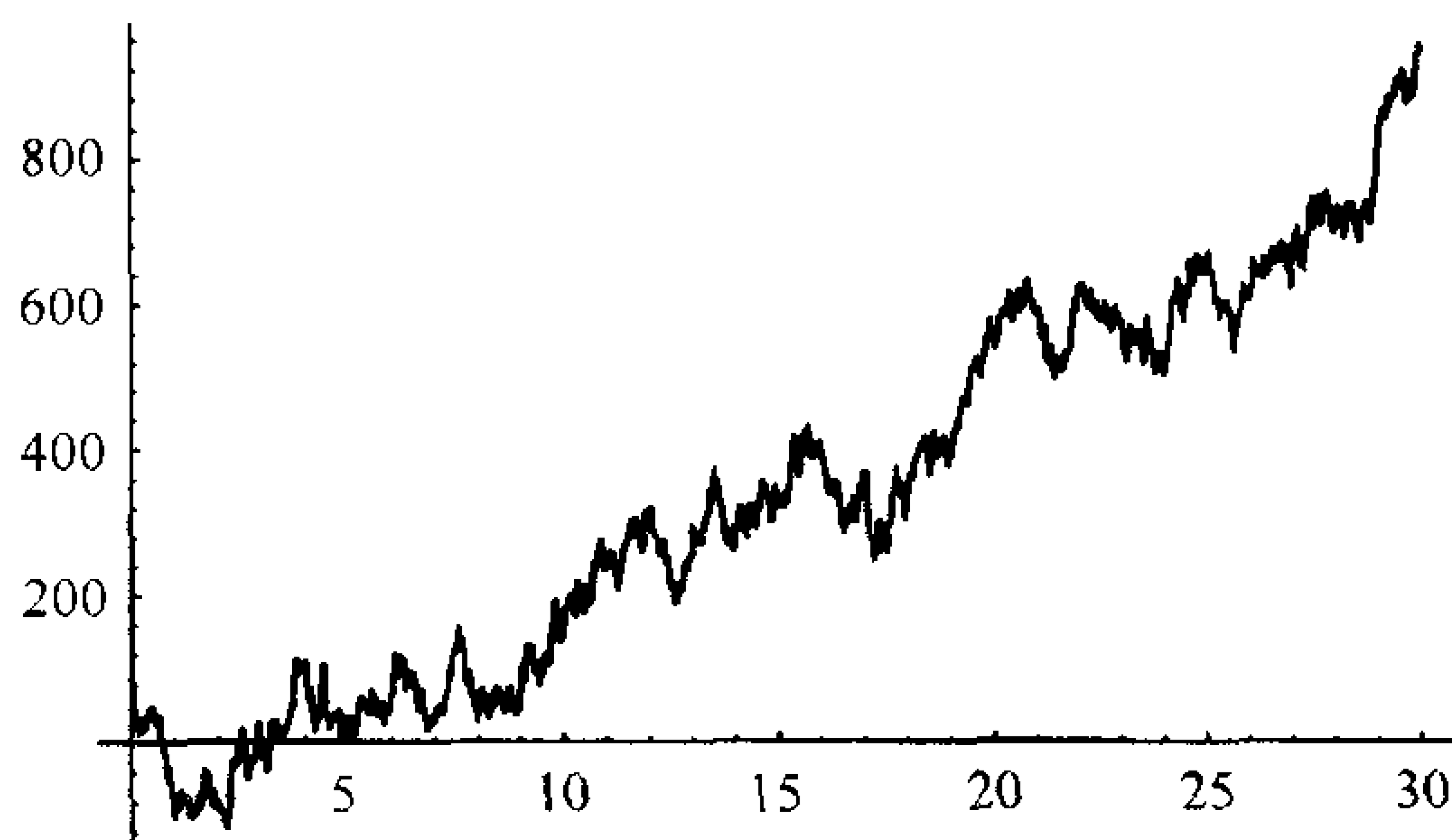


图 3-5 带漂移的 Brown 运动

可以看到不是很差，此过程有长期向上的走势，这正如我们所盼. 但是，在这个特殊情况下，有一个小小的问题. 此过程到达了一个负值，对一个有限责任公司股票而言，这却是不希望出现的情况.

习题

3.3 证明对所有的 σ（$\sigma \neq 0$），μ 和 $T > 0$，总存在一个正概率，使得 S_T 为负.（提示：考虑 S_T 的边际分布.）

50

直接用 Brown 运动来描绘股票市场是有很大风险的. 不妨考虑对过程取指数

$$X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t).$$

现在可以反映出股市长期的指数增长（在适当的测度下，从无扰动，变动到扰动越来越大）. 再次找恰当的 σ 和 μ 的值（$\sigma = 0.178$，$\mu = 0.087$. 即噪声率为 0.178，年漂移率为 8.7%）使之拟合得最好，我们可以模拟一个样本轨道（图 3-6）.

这个过程很有名，通常称之为带漂移的指数 Brown 运动，有时也称之为带漂移的几何 Brown 运动. 它不仅可以作为股票模型，在后面我们还会看到其他一些这方面的例子. 它很简单，又不是很糟糕.（如果没有标题，你能区分下页两幅图吗?）Brown 运动给我们提供一个强有力的构造基础.

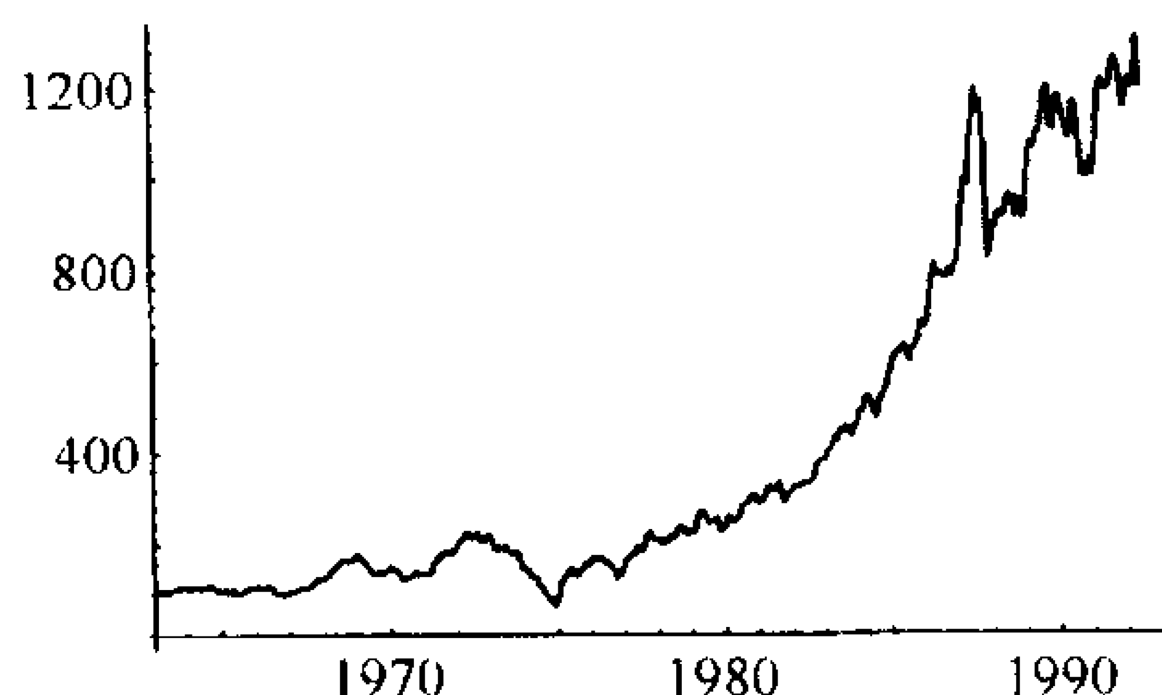


图 3-1 UK FTA 指数，1963—92

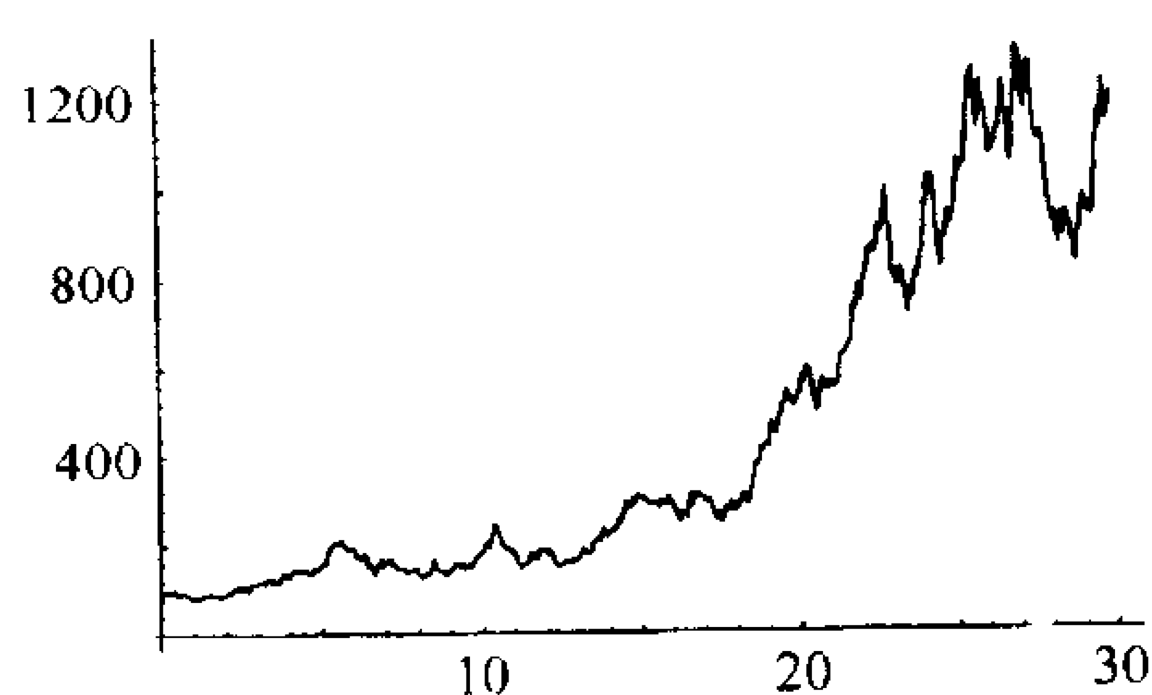


图 3-6 指数 Brown 运动

3.2 随机积分

用函数来描述 Brown 运动是有效的，但也给我们带来了复杂性. 考虑任一光滑（可微的）曲线，就整体而言，它可能有任意的形状，这是由于可微这个条件并不是在大范围内起作用. 选定一小部分用显微镜放大它. 在图 3-7 中，我们聚焦于给定的可微曲线上的一点，它在 x 轴上的坐标为 1.7，每一次放大率为 10 倍.

51

然后我们从左到右、自上而下地看图. 将每一个小框放大，形成下一个图的框架. 随着此过程的继续，图中的曲线片断变得越来越光滑，趋向于直线，最终，它变得笔直了——成了一条直线.

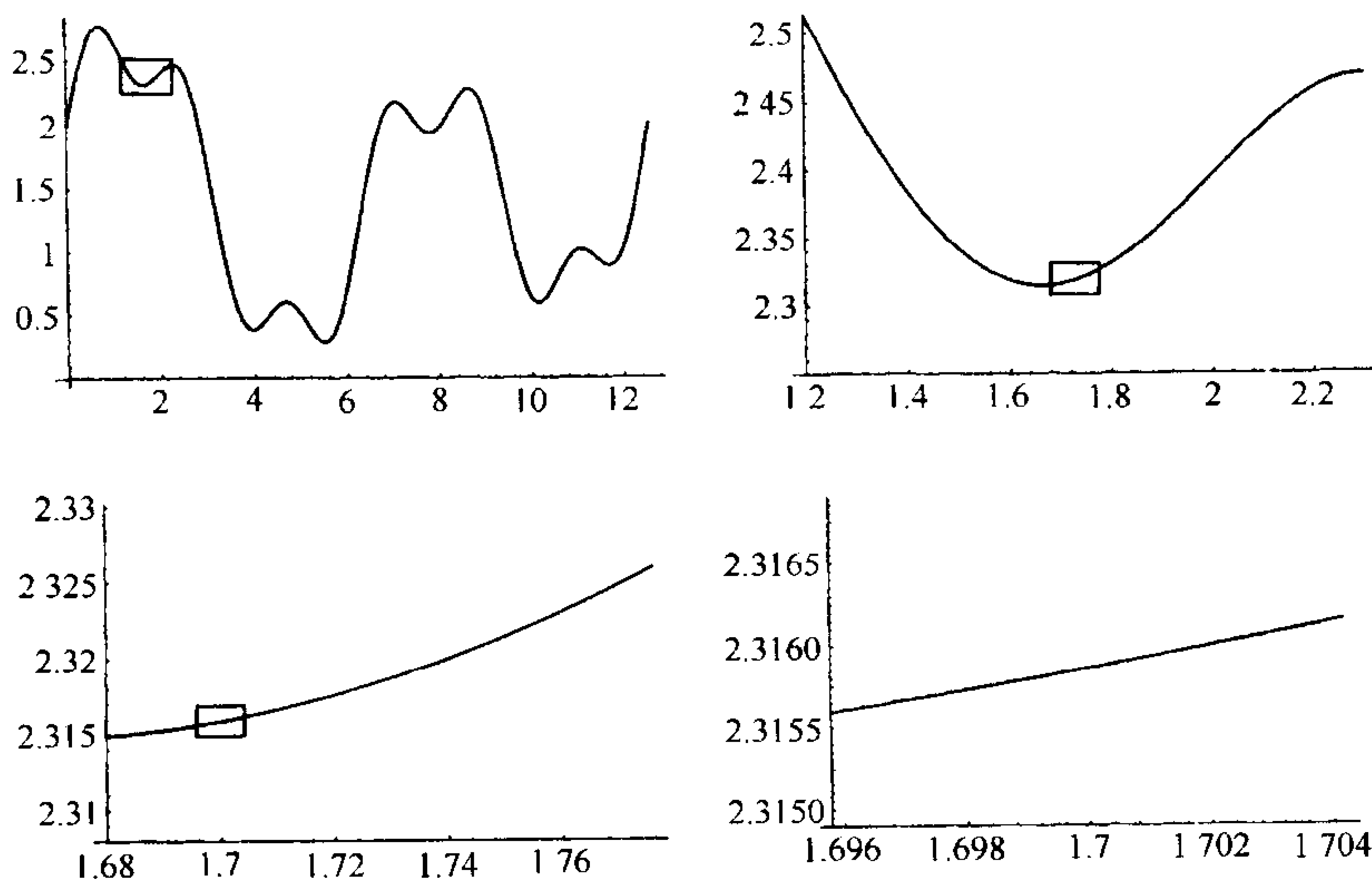


图 3-7 在点 1.7 处放大的过程

不管可微函数在整体上怎样变化，但在实质上，它们都是由直线片段构成的. 牛顿微积分就充分体现了这一点.

利用牛顿构造法，我们就可以用构造基础——直线，来详细表明局部的构造，从而构

造一组性质较好的函数. 在 t 时刻经过无穷小时间间隔 $\mathrm{d}t$ 后，牛顿函数 f 值的改变量可以表示为

$$\mathrm{d}f_t = \mu_t \mathrm{d}t,$$

其中 μ_t 为尺度函数，是函数在 t 时刻的斜率或将函数放大为直线的漂移.

现在可以研究牛顿函数的本质了，考虑例子：

(1) 方程 $\mathrm{d}f_t = \mu \mathrm{d}t$，$\mu$ 为一常数. f 是什么？它看起来是什么样的？它的整体形状是怎样的？我们能否把它画出来呢？如果我们把斜率为 μ 的小的直线片段连在一起，直觉告诉我们，我们得到了一个斜率为 μ 的直线. 假设 $f_0 = 0$，就可以（正确地）猜测，可以将 f_t 表示为较熟悉的形式 $f_t = \mu t$. [52]

(2) 方程 $\mathrm{d}f_t = t\mathrm{d}t$. 此处，在 t 时刻斜率为 t. 那么，它看起来是什么样子的呢？简单的积分就可以解决这个问题. 若 $f_0 = 0$，那么我们就可以锁定 $f_t = \frac{1}{2}t^2$. 此过程稍难一些，但是我们可以设法解决它. 可以通过微分：$f_t' = t$ 来检验，它正是我们所求.

然而它们是否具有惟一性呢？在第一个例子中，从直觉上我们可以排除其他解的可能性. 但是，在第二个例子中又会怎样呢？这种构造方法（$\mathrm{d}f_t = t\mathrm{d}t$ 告诉了如何构造 f_t，并且给定一初始点和一个确定的构造方案，我们应该生成惟一可能的 f_t）表明 $f_t = \frac{1}{2}t^2$ 是惟一的解，我们可以将之公式化.

牛顿微分的惟一性

在这里惟一性有两个互补的形式起作用：

- 如果 f_t 和 $\tilde{f}_t$ 为两个可微函数，在0时刻相等（$f_0 = \tilde{f}_0$），并且有相同的漂移（$\mathrm{d}f_t = \mathrm{d}\tilde{f}_t$），那么，这两个过程相等：$f_t = \tilde{f}_t$，对任意的 t 成立. 换句话说，对于给定的漂移 μ_t（和 f_0），f 为惟一的.
- 其次，给定一个可微函数 f_t，则存在惟一的一个漂移函数 μ_t 满足 $f_t = f_0 + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s$（对任意的 t）. 因此，对给定的 f，μ 是惟一确定的.

如果不直接给出漂移 μ_t，漂移本身依赖函数当前的取值，那么我们就碰到难题了. 特别地，如果漂移项 μ_t 为 $\mu(f_t, t)$，此处，$\mu(x, t)$ 为已知函数，那么，

$$\mathrm{d}f_t = \mu(f_t, t)\mathrm{d}t$$

称为常微分方程（ordinary differential equation，简记为 ODE）. 若存在一个可微函数 f（给定 f_0）满足此方程，那它就是方程的一个解. 有许多常微分方程没有解，还有更多的常微分方程的解不惟一.（常微分方程解的惟一性不能由以上方框中所示的牛顿微分的惟一性导出.） [53]

(3) 方程 $\mathrm{d}f_t = f_t\mathrm{d}t$. 现在的情况更复杂了，因为直接积分不能得到方程的解. 可以猜

测$f_t = e^t$，并可以通过微分来检验其正确性．当$f_0 = 1$时，解恰好惟一．

（4）方程$df_t = f_t t^{-2}dt$，这是一个更糟糕的情况．此处，解不一定存在，也不一定惟一．若给定$f_0 = 0$，则方程有无穷多个解，$f_t = a\exp(-\frac{1}{t})$，对任意常数$a$成立．然而，当$f_0 \neq 0$时，方程没有解．

也许牛顿函数的性质还不够好．尽管常微分方程是一个强有力的构造工具，然而，它们也有不利之处，有许多“不好”的常微分方程我们就不知道怎样去研究它们．

3.2.1 随机微分方程

如果用牛顿微分不好解方程，不妨构造一个基于Brown运动的过程，放大Brown运动并不能产生一条直线（图3-8）．

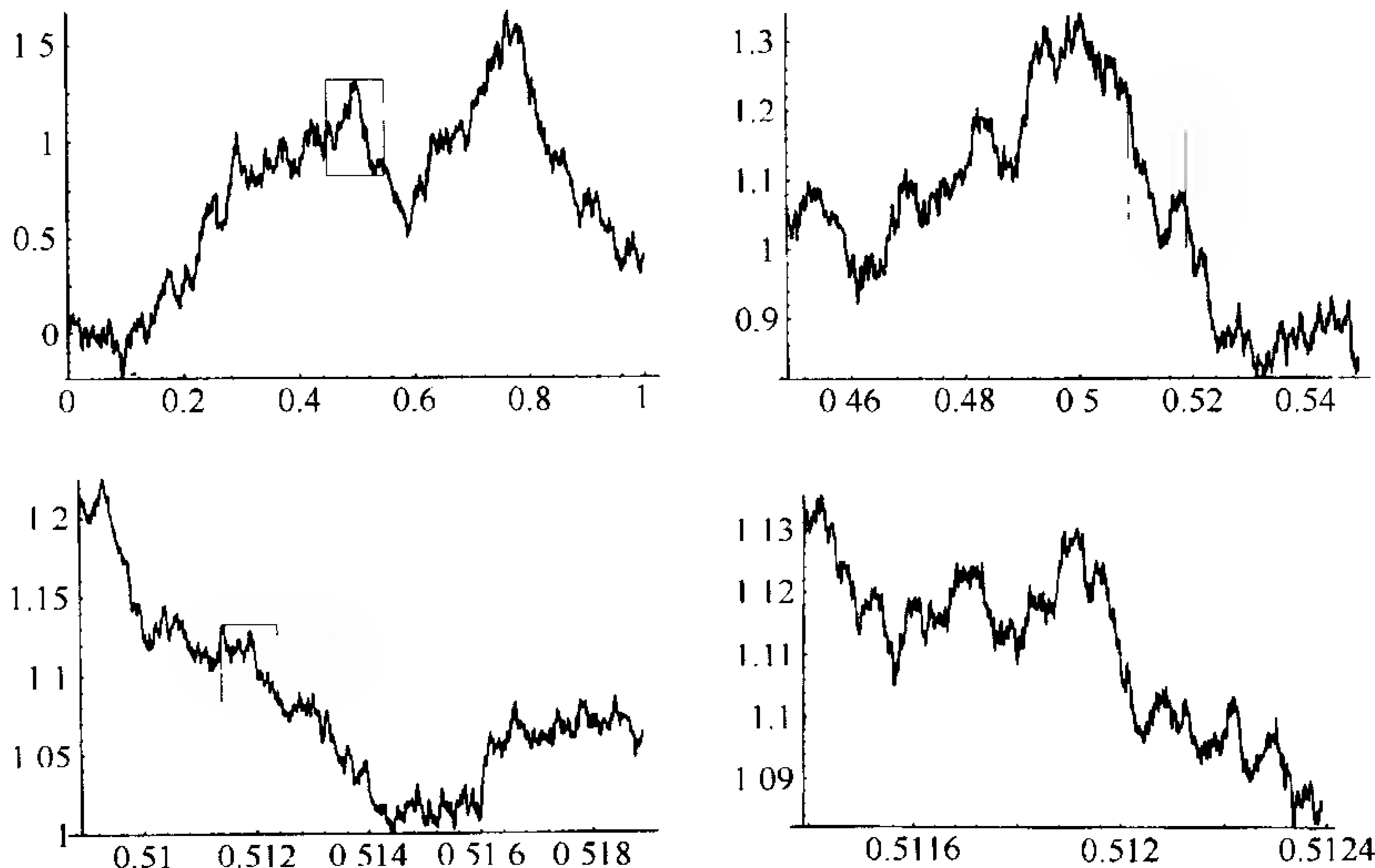


图3-8 放大的Brown运动

和前面的一样，在水平和垂直方向采用适当的比例尺，将方框内的图像变换得到下一个图像．Brown运动的自相似性说明，每一个新的图像仍为Brown运动，如同噪声．

54

然而，作为构造基础，这种自相似性却是理想的——我们可以从许多局部的Brown运动片段来构造整个的Brown运动，还可以由小的Brown运动片段（选取适当的比例）来构造一般的随机过程．如果用直线（选取适当比例）来构造，就可以把牛顿函数也包括进去了．

一个随机过程X是含有基于dt的牛顿项和一个Brown项——它是基于W的无穷小增量，我们就称之为dW_t．X的Brown项还可以有一个噪声因子σ_t．因此，X_t的无穷小增量为

$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$.

和牛顿微分一样，漂移μ_t可以依赖时间t，也可以为随机的，依赖直到时刻t为止X（或实际是W）自身的取值．噪声因子σ_t也是如此．像X和σ这样的过程，它们在t时刻的

取值依赖着过去的历史 $\mathcal{F}_t$，而不依赖将来，这样的过程称之为关于 Brown 运动 W 的过滤 $\mathcal{F}$ 适应的.

我们称 σ_t 为过程 X 在时刻 t 的波动率，μ_t 为过程在时刻 t 的漂移.

3.2.2 随机过程

这样的过程的全貌是什么样子的呢？就像牛顿微分一样，要找到这一点，必须以某种方式对随机微分进行积分才行. 现在可以给出（连续的）随机过程的正式定义了.

随机过程的定义（见方框）并不是普适的. 特别地，它不包括不连续的情况，例如 Poisson 过程. 然而，对我们以后将要遇到的模型而言，这已经足够了.

一个技术上的条件是 σ 和 μ 必须为关于 $\mathcal{F}$ 可料的过程. 这意味着他们是关于过滤 $\mathcal{F}$ 是可适应的，他们可以有一些不连续的跳. 就随机分析而言，是把随机过程定义为半鞅，其漂移项绝对连续. 这一类随机过程在后面用到的所有算子下都是闭的，并且，我们要考虑的所有模型也都在其中.

当这些都满足时，我们可以给出关于惟一性的结论来反映此经典的构造. 55

随机过程

称一个随机过程 X 是一个连续过程 $(X_t:t\geqslant 0)$，如果 X_t 可以表示为

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s,$$

其中 σ 和 μ 为随机的、关于 $\mathcal{F}$ 可料的过程，并使得 $\int_0^t (\sigma_s^2 + |\mu_s|)\mathrm{d}s$ 对任意时刻 t（以概率 1）都有限，这个等式的微分形式可以写为

$$\mathrm{d}X_t = \sigma_t \mathrm{d}W_t + \mu_t \mathrm{d}t.$$

波动率和漂移的惟一性

惟一性有两个互补的形式在这起作用.

- 首先，当过程 X_t 和 $\tilde{X}_t$ 在 0 时刻相等 $(X_0 = \tilde{X}_0)$，并且它们有相同波动率 σ_t 和漂移 μ_t，那么，这两个过程相等：$X_t = \tilde{X}_t$，对任意的 t 都成立. 换言之，给定 σ_t 和 μ_t（和 X_0），X 是惟一确定的.
- 其次，给定过程 X，仅有惟一的一对波动率 σ_t 和漂移 μ_t 满足 $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s + \int_0^t \mu_s \mathrm{d}s$（对任意的 t）. 对于给定的 X，σ_t 和 μ_t 的惟一性由 Doob-Meyer 半鞅的分解定理得到.

在特殊情况下，当 σ 和 μ 对 W 的依赖仅是通过对 X_t 的依赖而体现时，例如 $\sigma_t = \sigma(X_t, t)$，其中 $\sigma(x,t)$ 为某个确定的函数. 此时称方程

$$\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t,t)\mathrm{d}W_t + \mu(X_t,t)\mathrm{d}t$$

为 X 的随机微分方程（stochastic differential equation，简记为 SDE）. 一般情况下，写出给定过程 X 的随机微分方程（如果存在的话）要比给出随机微分方程的一个显式解要更容易些. 就像在牛顿情况（ODE）下一样，一个随机微分方程不一定有解，即使有解，也不一定惟一. 随机微分方程的引入将过程从严格的定义拓宽，包括了过程的随机微分，这些过程的波动率和漂移不仅依赖于 X_t 和 t，还依赖历史 $\mathcal{F}_t$ 中其他的事件.

56

现在，我们是否能够认识所构造的这些过程了？或许就 Brown 运动 W_t 而言，我们是否有所掌握呢？

在简单情况下，σ 和 μ 均为常数时，意味着 X 有常量的波动率和漂移，X 的随机微分方程为

$$dX_t = \sigma dW_t + \mu dt.$$

不难猜出，它的解为

$$X_t = \sigma W_t + \mu t$$

（假定 $X_0 = 0$）. 即使对 W_t 和 dW_t 了解甚少，但是它也给了我们信心，让我们认识到 σW_t 的微分为 σdW_t. 当 σ 和 μ 独立于 X 时，惟一性的结论能够提供这是惟一解的部分证明.

但当考虑稍微复杂的随机微分方程（与牛顿常微分方程例（3）相对应），

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu\, dt),$$

我们则无能为力.

3.3 Itô 微积分

直观上的积分是不够的. 我们需要工具来处理微分方程，就像牛顿微积分学中有链式法则、乘积法则及分步积分法等等那样.

再看看牛顿微积分. 假定有一个关于 Brown 运动的函数 f，设 $f(W_t) = W_t^2$. 我们能否用简单的链式法则来求得随机微分 df_t？在牛顿法则下，$d(W_t^2)$ 为 $2W_t dW_t$，我们必须通过积分来检验. 因为

57

$$\text{如果} \int_0^t d(W_s^2) = 2\int_0^t W_s dW_s, \quad \text{那么}\ W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s.$$

下面来处理 $\int_0^t W_s dW_s$. 对某个 n 将时间区间 $[0,t]$ 做一个分割 $\{0, t/n, 2t/n, \ldots, (n-1)t/n, t\}$，然后在此分割上求和来近似积分，即

$$2\int_0^t W_s dW_s \approx 2\sum_{i=0}^{n-1} W\left(\frac{it}{n}\right)\left(W\left(\frac{(i+1)t}{n}\right) - W\left(\frac{it}{n}\right)\right).$$

括号内的差恰为 Brown 运动从一个给定的分割点到下一个分割点的增量. 由 Brown 运动的性质(iii)知，此增量独立于此分割点以前的 Brown 运动，特别地它独立于 Brown 运动项 $W(it/n)$. 另外，此增量期望为0，这就意味着此增量与 $W(it/n)$ 的乘积的期望也为0. 因此，对零期望的项求和，其和本身也有零期望.

但是由 Brown 运动方差的结构知 W_t^2 的期望为 t. 因此 $2W_t\mathrm{d}W_t$ 不是 W_t^2 的微分，因为积分后并不能得到正确的期望.

错在哪？对某一光滑函数 f，考虑 $f(W_t)$ 的 Taylor 展开式：

$$\mathrm{d}f(W_t) = f'(W_t)\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}f''(W_t)(\mathrm{d}W_t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(W_t)(\mathrm{d}W_t)^3 + \cdots$$

由于太熟悉牛顿微分，我们总假定 $(\mathrm{d}W_t)^2$ 和高阶项都为零. 但是正如前面所观察到的，Brown 运动是奇特的. 我们还用刚才 $[0,t]$ 的分割 $\{0,t/n,2t/n,\cdots,t\}$ 来考虑 $(\mathrm{d}W_t)^2$. 用

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_t)^2 = \sum_{i=1}^n \left(W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)\right)^2$$

近似值（希望其收敛）来刻画 $(\mathrm{d}W_t)^2$ 的积分. 但是如果令 $Z_{n,i}$ 为

$$Z_{n,i} = \frac{W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)}{\sqrt{t/n}},$$

那么，对每个 n，序列 $Z_{n,1},Z_{n,2},\ldots$ 为一组独立同分布(iid)的正态分布变量 $N(0,1)$.（由 Brown 运动的性质(iii)知，每个增量 $W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)$ 服从正态分布 $N(0,t/n)$，独立于其前的那些增量.）

58

将 $\int(\mathrm{d}W_s)^2$ 的近似值重写为

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 \approx t\sum_{i=1}^n \frac{Z_{n,i}^2}{n}.$$

由弱大数定律（和强大数定律一样，此处只考虑随机变量的分布）可知，右边求和项的分布收敛到每个 $Z_{n,i}^2$ 的常数期望1，即 $\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = t$，或微分形式为 $(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t$.

尽管 $(\mathrm{d}W_t)^2$ 是二阶的形式，我们也不能忽略此项. 那么 $(\mathrm{d}W_t)^3$ 和其他的更高项又怎样呢？结果显示它们都为0.（例如，$\mathbb{E}(|\mathrm{d}W_t|^3)$ 和 $(\mathrm{d}t)^{3/2}$ 同阶，与 $\mathrm{d}t$ 相比可以忽略.）因此，Taylor 展式为

$$\mathrm{d}f(W_t) = f'(W_t)\mathrm{d}W_t + \frac{1}{2}f''(W_t)\mathrm{d}t + 0.$$

它与牛顿微分在形式上有很大的差别，这正是我们所要求得的 Itô 公式（有时候，更恰当的称为 Itô 引理）.

Itô 公式

若 X 为一随机过程，满足 $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$，$f$ 为一确定的连续二次可微函数. 那么，$Y_t := f(X_t)$ 也为一随机过程，由

$$dY_t = (\sigma_t f'(X_t))dW_t + (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t))dt$$

给定.

现在返回到 W_t^2，令 $X = W$ 和 $f(x) = x^2$，应用 Itô 公式得：

$$d(W_t^2) = 2W_t dW_t + dt \quad 或 \quad W_t^2 = 2\int_0^t W_s dW_s + t,$$

至少它有正确的期望.

更一般的，若 X 仍为 Brown 运动 W，则如上所示，$f(X)$ 有微分

59

$$df(W_t) = f'(W_t)dW_t + \frac{1}{2}f''(W_t)dt.$$

习题

3.4 若 $X_t = \exp(W_t)$，那么 dX_t 是什么呢？

3.3.1 由过程求随机微分方程

Itô 公式最直接的应用就是由一个过程的函数表达式来生成 SDE. 考虑在 3.1 节中建立的指数 Brown 运动模型：

$$X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t).$$

X 服从的 SDE 是什么样的呢？我们可以处理括号内的项，但是还必须对指数函数进行随机微分. 有了正确的表达式，我们就可以用 Itô 公式了.

假设取 $Y_t = \sigma W_t + \mu t$，f 为指数函数 $f(x) = e^x$. 那么 Y_t 很简单，且可以很快地写出它的微分来：$dY_t = \sigma dW_t + \mu dt$. 但是当然 X_t 可写为 $X_t = f(Y_t)$，因此应用 Itô 公式可得：

$$dX_t = \sigma f'(Y_t)dW_t + (\mu f'(Y_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(Y_t))dt.$$

由指数函数性质可得 $f'(Y_t) = f''(Y_t) = f(Y_t) = X_t$，故我们可以把微分改写为

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt).$$

有时称变量 σ 为过程的对数波动率，因为它是过程 $\log X_t$ 的波动率，尽管它自身有意义，但是经常被简称为波动率. 我们也称 $\log X_t$ 的漂移 μ 为对数漂移，它与上面的 $\frac{dX_t}{X_t}$ 的漂移不同.

3.3.2 由随机微分方程求过程

此道理和微分很相象（简单，但其反函数可能不存在），用 Itô 公式将过程转化为 SDE 相对简单明了．如果这就是我们的任务，那就似乎问题不大了．但是，并非如此——我们需要的恰恰相反，是要把 SDE 转化为过程．换句话说，就是解 SDE. [60]

一般情况下，SDE 解不出．大多数的 SDE 太难解了．但是，有一些少见的例子像 ODE 一样可以靠灵感来猜出其解，然后用 Itô 公式来验证猜测的解就是真正的解．称 SDE 的这样一个解为扩散．

假如我们要求解 SDE

$$dX_t = \sigma X_t dW_t,$$

我们靠灵感来猜，注意到这个 SDE 中的随机项（$\sigma X_t dW_t$）和前面通过 Itô 公式生成的 SDE 一样．而且如果选择 μ 为 $-\frac{1}{2}\sigma^2$，那么那个 SDE 中的漂移项就和这个所求的 SDE 中的漂移项一样．于是我们猜测

$$X_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t).$$

Itô 公式告诉我们什么？dX_t实际上就是 $\sigma X_t dW_t$，这正是我们所要的．因此我们找到了一个解，并且它是惟一解（至多差个常系数）．可求解的 SDE 很少，这个例子很特殊，叫做 Brown 运动的“Doléans”指数．

返回到前面难解的 SDE：

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt).$$

此 SDE 和 $\exp(\sigma W_t + \upsilon t)$ 的 SDE 中的漂移和波动率分别一致当且仅当取 υ 为 $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$．因此我们可以猜到

$$X_t = \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t).$$

Itô 公式又一次验证了我们的直觉．

习题

3.5 求解 $dX_t = X_t(\sigma\, dW_t + \mu_t dt)$，其中 μ_t为一个关于时间 t 有界可积的一般函数． [61]

3.3.3 乘积法则

牛顿定律的另一个法则为乘法法则，即 $d(f_t g_t) = f_t dg_t + g_t df_t$．而在随机环境下，有两个（表面上看）分开的情况．

在一般情况下，X_t和 Y_t对同一个 Brown 运动 W 适应，即

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$
$$dY_t = \rho_t dW_t + \upsilon_t dt.$$

对$\frac{1}{2}((X_t+Y_t)^2 - X_t^2 - Y_t^2) = X_tY_t$应用Itô公式可得

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t\rho_t dt,$$

上式最后一项实际上是$dX_t dY_t$（根据$(dW_t)^2 = dt$得来）．这又一次表明牛顿微分和Itô微分的区别.

在其他情况下，X_t和Y_t为适应于不同的、相互独立的Brown运动的随机过程，例如

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$
$$dY_t = \rho_t d\widetilde{W}_t + \upsilon_t dt.$$

此处，σ_t和ρ_t分别为过程X和过程Y的波动率，μ_t和υ_t分别为它们的漂移，W和$\widetilde{W}$为两个独立的Brown运动，那么有

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t,$$

和牛顿微分一致.

更进一步，若把X_t和Y_t都看作对二维Brown运动$(W_t, \widetilde{W}_t)$适应，二者就统一起来了，这将在6.3节中解释说明.

习题

3.6 如果B_t为一有零波动率的过程，X_t为任意随机过程，证明

62

$$d(B_tX_t) = B_t dX_t + X_t dB_t.$$

3.4 测度变换——C-M-G定理

仍有一些隐藏在背后的东西．前一章的一个中心议题是讨论将过程和测度分开的重要性．可是在随机微分中我们似乎并没有提到测度．现在我们已经有了一些简单的工具来处理随机过程，但这是用来处理Brown运动微分的，而不是处理测度的．事实上我们并没有忽略了测度的重要性——W_t从本质上说不是一个严格的Brown运动，它只是关于某个测度$\mathbb{P}$的Brown运动，一个$\mathbb{P}$-Brown运动．因此随机微分法描述的是过程X在使得W_t（或dW_t）成为Brown运动的测度$\mathbb{P}$下的行为．现有的工具并不能给我们任何启示，当测度变换时，W_t如何使X_t变化的.

当这种情况发生时，在测度变换下，Brown运动将发生简单的变化，通过推广到它们的微分使随机过程也相应地发生变化.

3.4.1 测度变换——Radon-Nikodym导数

为了从直观上了解测度变换的效果，我们先讨论离散过程．考虑一个简单的两步随机徘徊：

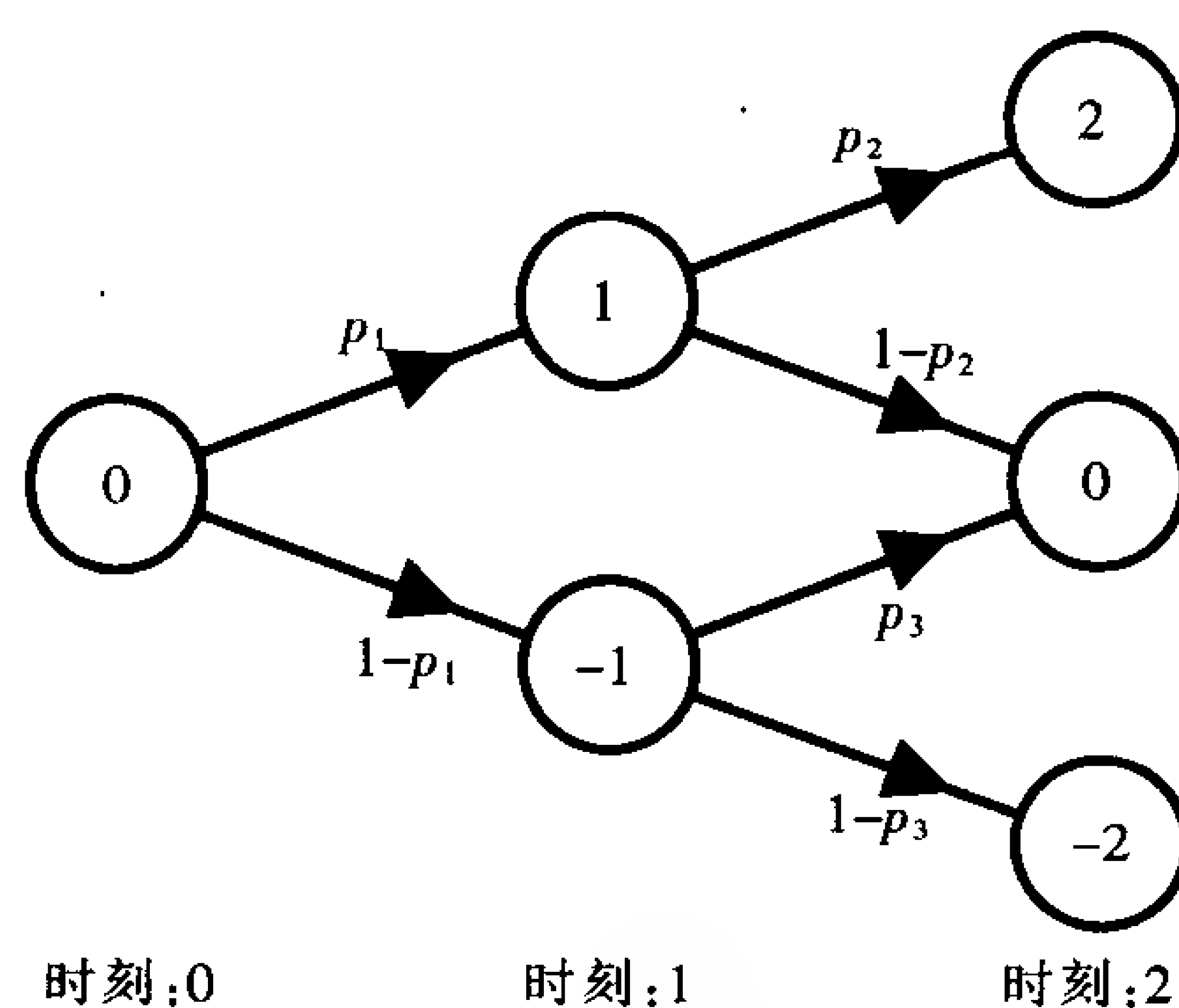


图 3-9 两步重组树

从时刻 0 到时刻 2，可以有四条轨道 {0,1,2}，{0,1,0}，{0,−1,0} 和 {0,−1,−2}. 假设给定这些轨道的概率如表 3-1. [63]

表 3-1 轨道概率

轨道	概率	
{0，1，2}	p_1p_2	$=: \pi_1$
{0，1，0}	$p_1(1-p_2)$	$=: \pi_2$
{0，−1，0}	$(1-p_1)p_3$	$=: \pi_3$
{0，−1，−2}	$(1-p_1)(1-p_3)$	$=: \pi_4$

我们可以把从这个轨道到对应到轨道概率的映射看作对测度 $\mathbb{P}$ 的编码. 如果知道 π_1，π_2，π_3 和 π_4（只要它们严格限制在 0 和 1 之间），那么就可以知道 p_1，p_2 和 p_3. 因此，如果用一个"非重合树"来表示此过程，那么就可以在每条轨道的末尾处标出对测度编码的 π 值.

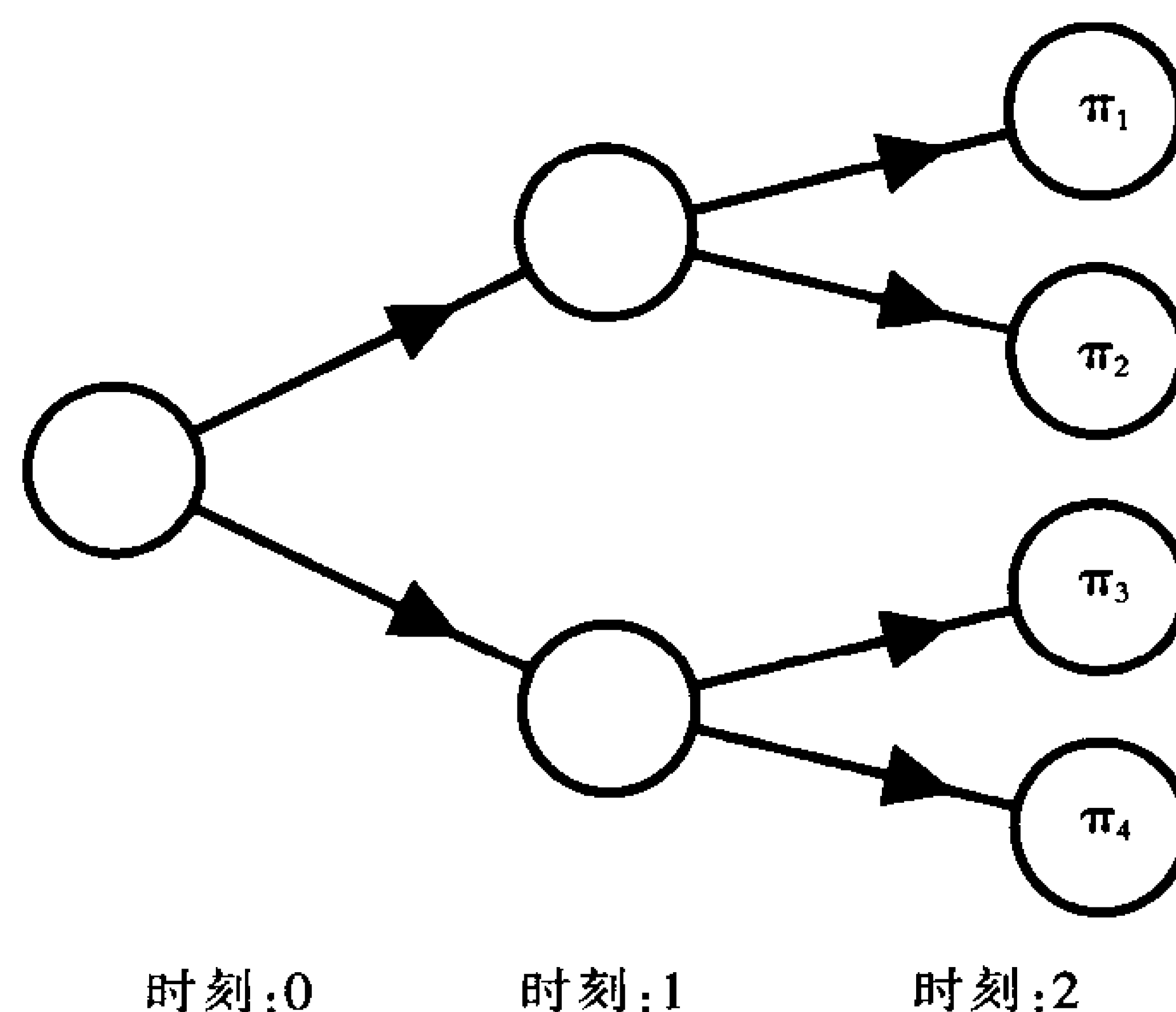


图 3-10 标明轨道概率的树

现假定有另一个不同的测度 $\mathbb{Q}$，概率为 q_1，q_2 和 q_3. 我们可以再次对轨道概率进行编码，设为 π'_1，π'_2，π'_3 和 π'_4. 当每个 π' 严格属于 0 和 1 之间的时候，π'_1，π'_2，π'_3 和 π'_4 惟一

地决定了$\mathbb{Q}$.

我们的想法是怎样对$\mathbb{P}$进行测度变换来生成测度$\mathbb{Q}$？利用这种编码，很自然地可以对测度$\mathbb{P}$和测度$\mathbb{Q}$的差别进行编码. 对每个轨道i，得到比率π'_i/π_i后，就可以把轨道到此比率的映射看为$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$了. 这个随机变量（它的随机性是由于它对轨道的依赖而导致）被称为到时刻2为止的测度$\mathbb{Q}$关于测度$\mathbb{P}$的 Radon-Nikodym 导数.

64

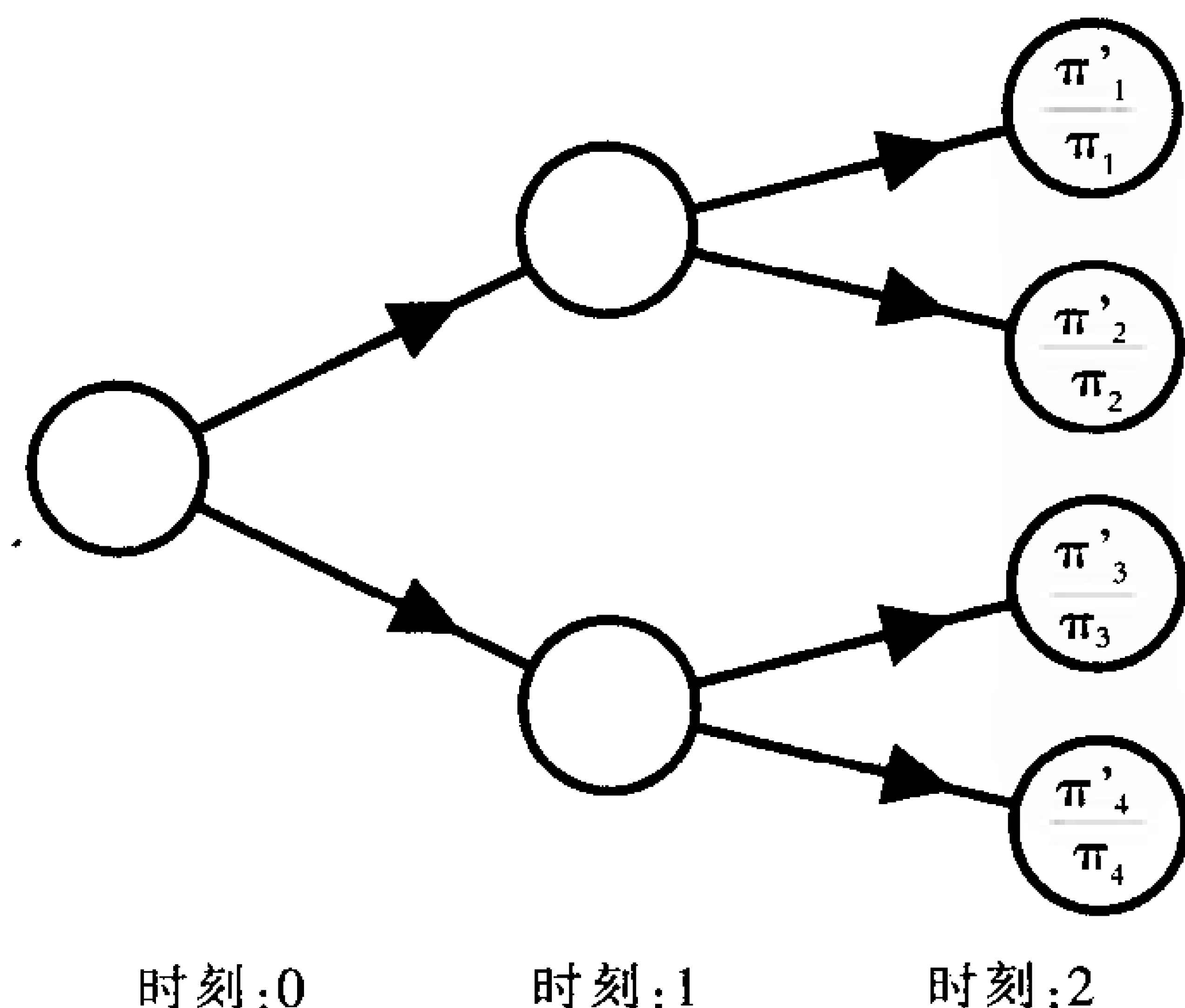


图 3-11　标明 Radon-Nikodym 导数的树

从$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$出发，我们可以由测度$\mathbb{P}$推导出测度$\mathbb{Q}$. 怎样做呢？如果有了测度$\mathbb{P}$，那么就能得到$\pi_1$，$\pi_2$，$\pi_3$和$\pi_4$，此外，$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$给出了比率$\pi'_i/\pi_i$，因此就能求出$\pi'_1$，$\pi'_2$，$\pi'_3$和$\pi'_4$，也就是求出了测度$\mathbb{Q}$.

当p_i或q_i为0或1时，情况会怎样呢？会有两种情况发生，其中一个问题就是不可能从π_i求出p_i了. 若p_1为0，那么π_1和π_2为0，故关于p_2的信息丢失了. 于是也不可能得到对应于π_1，π_2的轨道（概率为0）. 因此从某种意义上讲，p_2实际上已经无关紧要了. 如果我们限定只对可能的轨道给出π_i，就可以修复相应的p了.

第二个问题性质差不多，但是更加严重. 假设某个p为0，但所有的q都不为0. 那么当所有的π'_i都不为0时，至少有一个π_i为0. 此时，并不是所有的比率π'_i/π_i都有定义，故$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$不存在. 我们可以删除那些概率为0的轨道，但是这样做就失去了某些信息. 在测度$\mathbb{P}$下不可能有的一些轨道，在测度$\mathbb{Q}$下却有可能存在. 如果把它们抛弃掉，我们就失去了一些和测度$\mathbb{Q}$有关的信息——那些在测度$\mathbb{Q}$下可能的轨道. 如果在测度$\mathbb{Q}$下允许出现某些情况而在测度$\mathbb{P}$下不允许出现，那么就不能定义$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. 反之亦然.

65

这一点对公式化很重要.

等价（Equivalence）

对于两个测度$\mathbb{P}$和$\mathbb{Q}$，如果它们作用在相同的样本空间并且可能发生的事件也一样，那么称这两个测度等价．从形式上说，对样本空间中的任意事件A，

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0.$$

换言之，如果A在测度$\mathbb{P}$下有可能发生，那么它在测度$\mathbb{Q}$下也有可能发生．如果A在测度$\mathbb{P}$下不可能发生，那么它在测度$\mathbb{Q}$下也不可能发生．反之亦然．

当测度$\mathbb{P}$和测度$\mathbb{Q}$等价时，就可以在$\mathbb{P}$-可能的轨道上可以定义$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$和$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$了．当然，我们只能在测度$\mathbb{P}$和测度$\mathbb{Q}$等价并且轨道为$\mathbb{P}$-可能时定义有意义的$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$和$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$，但是如果轨道为$\mathbb{P}$-不可能的，我们也知道测度$\mathbb{Q}$对这个轨道的作用——如果测度$\mathbb{P}$和测度$\mathbb{Q}$等价，那么这些轨道也是$\mathbb{Q}$-不可能的．

因此两个测度有 Radon-Nikodym 导数$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$和$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$的前提是这两个测度等价．

3.4.2 期望和$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$

现在我们考虑的还是离散过程，下面我们再研究一些关于期望与 Radon-Nikodym 导数的一些性质．定义 Radon-Nikodym 导数的一个原因就是因为它所表示的是有效的编码，我们需要了解的测度$\mathbb{Q}$的信息都可以由测度$\mathbb{P}$和$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$得到．

考虑一个未定权益X，它在离散的二叉树上时刻 2 的值是已知的．这个未定权益X为一个随机变量，换言之，是从轨道到数值的一个映射．如果取过程的轨道i，令x_i代表未定权益X对应的取值．那么X关于测度$\mathbb{P}$的期望为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X) = \sum_i \pi_i x_i,$$

此处i取遍所有的四个可能的轨道．X关于测度$\mathbb{Q}$的期望为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \sum_i \pi'_i x_i = \sum_i \pi_i\left(\frac{\pi'_i}{\pi_i} x_i\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X\right).$$

和X一样，$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$是一个随机变量，也可以取期望，并且期望从测度$\mathbb{Q}$到测度$\mathbb{P}$的转换也很简单：$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X\right)$． 66

尽管这一点很具有吸引力．但是它只代表了一种简单的情况：在一个特殊的时间范围——轨道的末端，$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$才有定义，在这里$T=2$．我们详细给出了此时的$X$，而所求的仅仅是无条件期望．形式上导出的结果是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T \mid \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X_T \mid \mathcal{F}_0),$$

其中，T 为$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$的时间范围，$X_T$在时刻 T 是已知的. 但是当 t 不等于 T，s 不等于 0 时，$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t \mid \mathcal{F}_s)$会是什么样的呢？我们想知道的不仅仅是在轨道末端的$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$，而是每一处的$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$——它是一个随机变量，但我们想知道的是一个过程.

3.4.3　Radon-Nikodym 过程

我们可以让时间范围变动来做到这一点，如果令 ζ_t为直到时刻 t 为止的 Radon-Nikodym 导数，即 ζ_t为遵循直到时刻 t 的轨道的 Radon-Nikodym 导数$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$，并且只知道此时刻以前轨道的概率之比. 例如，在时刻 1 的可能轨道为 $\{0,1\}$，$\{0,-1\}$，导数 ζ_1在它们上的值分别为 q_1/p_1，$(1-q_1)/(1-p_1)$. 在 0 时刻，导数过程 ζ_0恰为 1，这是因为惟一的轨道为点 $\{0\}$，在测度$\mathbb{P}$ 和测度$\mathbb{Q}$ 下，其概率均为 1. 我们可以用 p 值和 q 值详细填写树上 ζ_t的值了（图 3-12）.

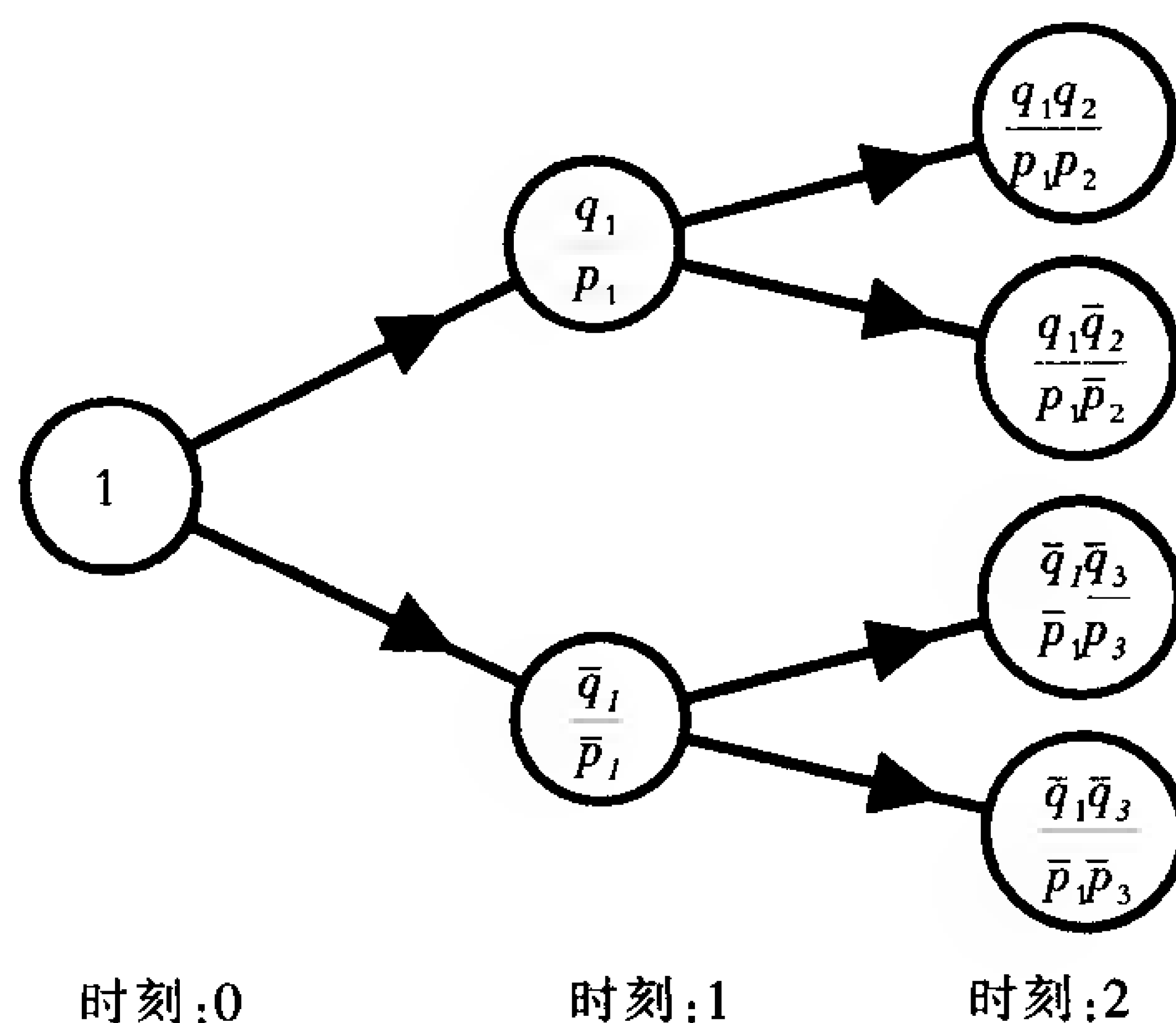


图 3-12　标明过程 ζ_t的树（$\bar{p}_i = 1-p_i$，$\bar{q}_i = 1-q_i$）

67

事实上，ζ_t还有另一种表达式，即作为 T 时间范围的 Radon-Nikodym 导数的条件期望：

$$\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t),$$

对任意的 $t \leqslant T$.

习题

3.7　证明当 $t=0,1,2$ 时该等式成立.

可以看到关于测度$\mathbb{P}$ 的期望正确地拆分了$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. 过程 ζ_t表达了我们所求——沿着当前轨

道考虑直到时刻 t 的测度的变化量. 如果要求$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t)$，实际上它就是$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t)$，其中 X_t在时刻t 为已知的. 要求出$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s)$，只需知道从时刻$s$ 到时刻t 测度的变化量就可以了，它恰是ζ_t/ζ_s，这就是直到时刻 t 的变化中去掉了直到时刻 s 的变化. 换言之，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t|\mathcal{F}_s).$$

习题

3.8 在树上证明此结论.

Radon-Nikodym 性质

给定等价测度$\mathbb{P}$、$\mathbb{Q}$ 和一个时间范围 T，可定义一个在$\mathbb{P}$-可能的轨道上取正实数的随机变量$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$，使得

(i) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}X_T\right)$，对所有在时刻 T 已知的未定权益 X_T都成立.

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t|\mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t|\mathcal{F}_s)$，$s \leqslant t \leqslant T$，

其中 ζ_t为过程$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)$.

68

3.4.4 测度变换——连续的 Radon-Nikodym 导数

接下来要干什么呢？如果要对 Brown 运动定义一个测度，看起来我们必须能够写出过程所能取到的所有可能的轨道的概率，其范围不仅包括连续的状态空间，还包括连续的时间线. 如果我们只想表示过程在每个时刻的边际分布，那么标准概率论给出所需技术的一些思路. 尽管状态空间是连续的，我们仍可以用概率密度函数来表示概率.

例如，$\mathbb{P}$ 为对应于服从于正态分布 $N(0,1)$随机变量 X 的实数上的测度，那么通过密度函数$f_{\mathbb{P}}(x)$ 可以表示出测度$\mathbb{P}$，此处，

$$f_{\mathbb{P}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

粗略地说，$f_{\mathbb{P}}(x)$ 表示了事件 $\{X = x\}$ 发生的相对概率. 或者说，X 介于 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 之间的概率近似为$f_{\mathbb{P}}(x)\mathrm{d}x$. 确切地说，$X$ 在实数子集 A 上取值的概率为

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x.$$

例如，X 落在区间 $[0,1]$ 内的概率为密度函数在此区间上的积分 $\int_0^1 f_{\mathbb{P}}(x)\mathrm{d}x$，其值为 0.3413.

但是仅有边际分布还不够——单纯一个边际分布抓不住过程的实质（即使在离散树上

也能清楚地看到这一点）．即使知道在任意时刻 t 的所有边际分布也还不够．我们需要知道的是在过去历史$\mathcal{F}_s$ 条件下任意时刻 t 的边际分布（$s<t$）．我们需要掌握在连续情况下一个轨道的可能性，这要通过对任意时刻 $t<T$ 特定轨道一些概念来表述．

一种方法是指定一个轨道，如果并非在此时间范围 T 以前的所有时刻都指定，那么可以考虑在某个可以任意大但是仍是有限的时间集合 $\{t_0=0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n=T\}$ 上指定，然后考虑那些在 $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 过点 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的轨道构成的集合．如果只有一个时刻 t_1 和一个点 x_1，那么就可以写出这样一个轨道的可能性，可以用 W_{t_1} 的概率密度函数 $f_{\mathbb{P}}^1(x)$ 来表示，其中，$f_{\mathbb{P}}^1(x)$ 为正态分布 $N(0,t_1)$ 的密度函数，

69

$$f_{\mathbb{P}}^1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t_1}\right).$$

如果对时刻 t_1 可以这么做，也就可以对有限个时刻 t_i 这么做．我们需要的是在时刻 $\{t_1,\cdots,t_n\}$ 过程取值 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的联合似然函数 $f_{\mathbb{P}}^n(x_1,\cdots,x_n)$．

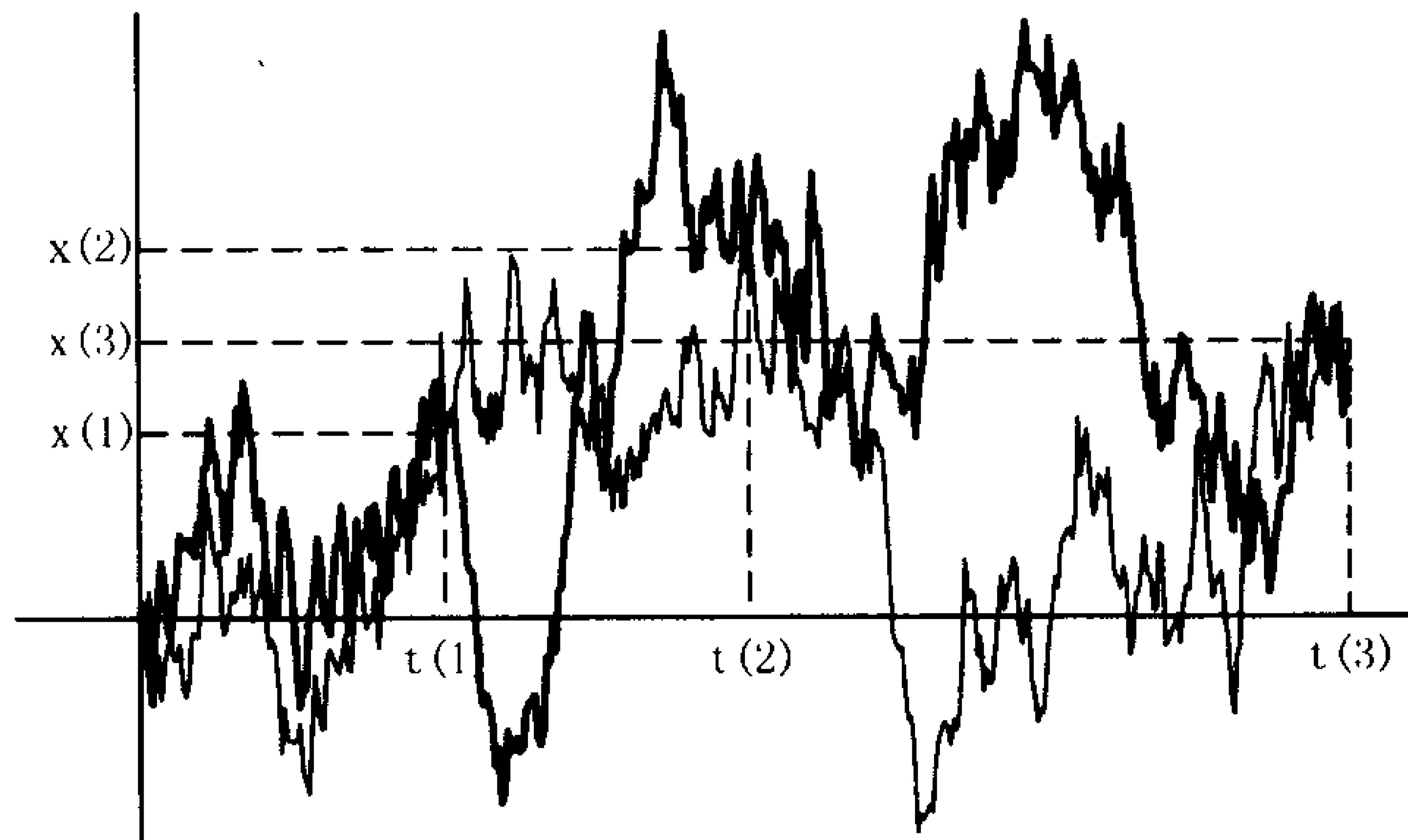


图 3-13 在 $\{t_1,t_2,t_3\}$ 上相交的两个 Brown 运动

Brown 运动的联合似然函数

如果取 t_0 和 x_0 为0，记 Δx_i 为 x_i-x_{i-1}，Δt_i 为 t_i-t_{i-1}，那么由 Brown 运动的第三个条件：增量 $\Delta W_i=W(t_i)-W(t_{i-1})$ 相互独立，那么

$$f_{\mathbb{P}}^n(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_i}}\exp\left(-\frac{(\Delta x_i)^2}{2\Delta t_i}\right).$$

由此可以写出一个对应于测度$\mathbb{P}$ 的过程在有限时间子集上的似然函数．在连续极限下，我们就有了一个处理关于测度$\mathbb{P}$ 的连续过程的方法．如果 A 为$\mathbb{R}^n$的一个子集，那么 n 维随机向量（$W_{t_1},\cdots,W_{t_n}$）落在 A 中的$\mathbb{P}$-概率就为似然函数 $f_{\mathbb{P}}^n$在 A 上的积分

70

连续情况下的 Radon-Nikodym 导数

设$\mathbb{P}$ 和$\mathbb{Q}$ 为两个等价的测度．给定一轨道 ω，对每个有顺序的时间网格 $\{t_1,\cdots,t_n\}(t_n=T)$，

定义 x_i 为 $W_{t_i}(\omega)$ 的取值，那么定义时刻 T 的导数 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 为区间 $[0,T]$ 内网格变得稠密时似然比的极限：

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\frac{f_{\mathbb{Q}}^n(x_1,\cdots,x_n)}{f_{\mathbb{P}}^n(x_1,\cdots,x_n)},$$

连续时间下的导数 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 仍满足以下结论：

(i) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X_T)$,

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t | \mathcal{F}_s)$, $s \leqslant t \leqslant T$,

其中，ζ_t 为过程 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t)$，$X_t$ 为关于历史 $\mathcal{F}_t$ 适应的任一过程.

就像可以通过极限时间网格来逼近测度 $\mathbb{P}$ 一样，Radon-Nikodym 导数 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 也是如此. 在网格中与 ω 相同的那些轨道构成的事件 $A = \{\omega' : W_{t_i}(\omega') = W_{t_i}(\omega), i = 1,\cdots,n\}$ 变得越来越小，直到它恰为一个单点集 $\{\omega\}$ 为止. Radon-Nikodym 导数可以看作极限

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(\omega) = \lim_{A\to\{\omega\}}\frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

3.4.5 测度的简单变换——带常数漂移的 Brown 运动

我们已经有了测度变换的方法，但是还不知道续情况下测度是怎样变化的. 例如，假定有一个 $\mathbb{P}$-Brown 运动 W_t，它在一个等价测度 $\mathbb{Q}$ 下将是什么样的呢？它仍然是一个可以认知的 Brown 运动，还是变得完全不同了呢？

先看一个简单的例子. 考虑 $\mathbb{P}$-Brown 运动 W_t. 在某时间范围 T 内通过 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$ 来（处处）定义测度 $\mathbb{Q}$ 为测度 $\mathbb{P}$ 的等价测度. 那么，W_t 在测度 $\mathbb{Q}$ 下是什么样的呢？

一个出发点（这仅仅是一个开始）就是考虑 W_T 在测度 $\mathbb{Q}$ 下的边际分布. 我们需要找到 W_T 在测度 $\mathbb{Q}$ 下的似然函数，或与之等价的一些信息. 一个常用的技巧就是它的矩母函数(moment - generating function).

正态性的判别

一个随机变量 X 在测度 $\mathbb{P}$ 下服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 当且仅当对所有的实数 θ.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(\theta X)) = \exp(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2)$$

要计算 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta W_T))$，可以依据 Radon-Nikodym 导数性质中的（i），它告诉我们此

期望等价于期望 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\exp(\theta W_T)\right)$，也就是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T)) = \exp(-\frac{1}{2}\gamma^2 T + \frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2 T),$$

这是因为 W_T 在测度 $\mathbb{P}$ 下为正态分布 $N(0,T)$.

简化此式可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta W_T)) = \exp(-\theta\gamma T + \frac{1}{2}\theta^2 T),$$

它为正态分布 $N(-\gamma T,T)$ 的矩母函数. 因此，W_T 在测度 $\mathbb{Q}$ 下的边际分布为方差为 T、期望为 $-\gamma T$ 的正态分布.

当 $t\leqslant T$ 时，W_t 会怎样呢？如果 W_t 在测度 $\mathbb{Q}$ 下为一个 Brown 运动加上一个常数 $-\gamma$ 的漂移，那么 W_T 的边际分布就和我们所希望的形式一样. 当然还有许多其他的过程在 T 时刻的边际分布也为正态分布 $N(-\gamma T,T)$，但是如果通过 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$ 将测度 $\mathbb{P}$ 变换为测度 $\mathbb{Q}$ 的惟一作用就是加进去了一个系数为 $-\gamma$ 的漂移，那么这个结果就漂亮了.

事实上的确如此. 过程 W_t 关于测度 $\mathbb{P}$ 为一个 Brown 运动，并且在测度 $\mathbb{Q}$ 下为 Brown 运动加上一个常系数 $-\gamma$ 的漂移. 应用关于 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 的两个结论可以证明 $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ 是 $\mathbb{Q}$-Brown 运动的三个条件：

[72]

(i) $\tilde{W}_t$ 是连续的，且 $\tilde{W}_0=0$；

(ii) $\tilde{W}_t$ 在测度 $\mathbb{Q}$ 下服从正态分布 $N(0,t)$；

(iii) $\tilde{W}_{t+s}-\tilde{W}_s$ 服从正态分布 $N(0,t)$，且独立于 $\mathcal{F}_s$.

第一条是成立的，(ii) 和 (iii) 还可以表示为

(ii)′ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta\tilde{W}_t)) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$；

(iii)′ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(\tilde{W}_{t+s}-\tilde{W}_s)) \mid \mathcal{F}_s) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)$.

习题

3.9 用测度过程变换 $\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t)$ 证明 (ii)′、(iii)′ 分别和 (ii)、(iii) 等价.

W_t 和 $\tilde{W}_t$ 关于不同的测度都为 Brown 运动，这看起来有点不可思议. 其实，将测度由 $\mathbb{P}$ 变换到了 $\mathbb{Q}$ 仅仅改变了所选轨道的相对可能性. 例如，W 可能在某一时间内以 $-\gamma$ 的速率沿着一条轨道向下漂移. 尽管这条轨道在测度 $\mathbb{P}$ 下可能性很小，但还是有可能发生的. 另一方面，在测度 $\mathbb{Q}$ 下，这条轨道的可能性却很大. 我们已经认识到这种情况，它仍然是 Brown 运动的不规则行为.

当 W_T 为非常小的负数（绝对值很大的负数）时，$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 变得很大，而当 W_T 接近 0 或者为

正数时，$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$变得很小. 这只是以下事实的推论：轨道在一个负数处结束的情况在测度$\mathbb{Q}$下（这时为 Brown 运动加上向下的漂移）比在测度$\mathbb{P}$下（无漂移的 Brown 运动）出现的可能性要大得多. 相应的，在 0 点附近或大于 0 处结束的轨道在测度$\mathbb{Q}$下的可能性要比在测度$\mathbb{P}$下的可能性要小得多.

3.4.6 Cameron-Martin-Girsanov 定理

这个测度的变换只是将一个通常的无漂移的 Brown 运动变为了一个带漂移的 Brown 运动——其他的都没有变. 当然，漂移项是构成过程的随机微分形式中的一部分. 实际上对 Brown 运动所做的测度变换能做的就是改变漂移项. 我们感兴趣的所有的模型都可以表示成瞬时微分的形式——由一定数量的 Brown 运动和一定数量的漂移运动组成. 因此，从测度$\mathbb{P}$下的随机微分到测度$\mathbb{Q}$下随机微分的映射也就很自然和合情合理了.

这就是定理所要揭示的.

73

Cameron-Martin-Girsanov 定理

设 W_t为一个$\mathbb{P}$-Brown 运动，γ_t为关于$\mathcal{F}$-可料过程，并满足有界性条件$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt) < \infty$，则存在一个测度$\mathbb{Q}$，使得

(i) 测度$\mathbb{P}$与测度$\mathbb{Q}$等价，

(ii) $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$，

(iii) $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ 为一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动.

换言之，W_t 为一个在 t 时刻有漂移系数 $-\gamma_t$ 的$\mathbb{Q}$-Brown 运动.

如果有所限制，要将$\mathbb{P}$-Brown 运动 W_t变换为带有某个给定漂移系数 $-\gamma_t$ 的 Brown 运动，那么，存在一个测度$\mathbb{Q}$能做到这一点.

如果取极限，那么漂移是测度，用来度量漂移.

考虑逆定理.

Cameron-Martin-Girsanov 逆定理

如果 W_t为$\mathbb{P}$-Brown 运动，测度$\mathbb{Q}$与测度$\mathbb{P}$与等价，那么存在一个关于$\mathcal{F}$可料的过程 γ_t，使得

$$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

为$\mathbb{Q}$-Brown 运动，即 W_t加上漂移 γ_t为$\mathbb{Q}$-Brown 运动. 进而，测度$\mathbb{Q}$关于测度$\mathbb{P}$（在时刻 T）的Radon-Nikodym 导数为 $\exp(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt)$.

3.4.7　C-M-G 定理和随机微分方程

Cameron-Martin-Girsanov 定理适用于 Brown 运动，但是我们所研究的过程实际上都是伪 Brown 运动. 现在能看到 Brown 微积分的好处了——要想控制任何过程的漂移，那么 Cameron-Martin-Girsanov 定理就是一个强有力的工具.

74

设 X 为一随机过程，其增量为

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$

其中 W 是一个$\mathbb{P}$-Brown 运动. 是否能找到一个测度$\mathbb{Q}$，使得过程 X 在测度$\mathbb{Q}$下的漂移项为 $v_t dt$ 而不是 $\mu_t dt$. 第一步，可以把 dX 改写为

$$dX_t = \sigma_t\left(dW_t + \left(\frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t}\right)dt\right) + v_t dt.$$

取 γ_t 为 $(\mu_t - v_t)/\sigma_t$，如果 γ 满足 C-M-G 定理的增长条件（$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right) < \infty$），那么就存在一个新的测度$\mathbb{Q}$，使得 $\widetilde{W}_t := W_t + \int_0^t (\mu_s - v_s)/\sigma_s ds$ 为一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动.

但是这意味着 X 在测度$\mathbb{Q}$下的微分为

$$dX_t = \sigma_t d\widetilde{W}_t + v_t dt,$$

其中，$\widetilde{W}$ 为$\mathbb{Q}$-Brown 运动——它给了 X 我们希望的漂移 v_t.

我们也可以给出把一个测度变换到与之等价的一个测度推广到一个过程上的限制条件，由于测度变换只能把 Brown 运动变为带有漂移的 Brown 运动，故过程的波动率保持不变.

例　测度变换

1. 设 X_t为漂移 Brown 过程 $\sigma W_t + \mu t$，其中 W 为一个$\mathbb{P}$-Brown 运动，σ 和 μ 均为常数. 取 $\gamma_t = \mu/\sigma$，由 C-M-G 定理知，存在一个等价测度$\mathbb{Q}$，使得在此测度下 $\widetilde{W}_t = W_t + (\mu/\sigma)t$，并且 $\widetilde{W}$ 为一个直到时刻 T 的$\mathbb{Q}$-Brown 运动. 则 $X_t = \sigma\widetilde{W}_t$ 为一个（变了尺度的）$\mathbb{Q}$-Brown 运动. 由此测度还得到不同的期望. 例如，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_t^2) = \mu^2 t^2 + \sigma^2 t$，而 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t^2) = \sigma^2 t$.

2. 设 X_t为指数 Brown 运动服从 SDE

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt),$$

其中，W 为一个$\mathbb{P}$-Brown 运动. 对任意的常数漂移 v，能否进行测度变换，使得 X 有新的 SDE

75

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + v dt).$$

在 C-M-G 定理中令 $\gamma_t = (\mu - v)/\sigma$，由定理可知确实存在一个测度$\mathbb{Q}$，使得在此测度下 $\widetilde{W}_t = W_t + (\mu - v)t/\sigma$ 为$\mathbb{Q}$-Brown 运动. 那么，X 确实有 SDE

$$dX_t = X_t(\sigma d\widetilde{W}_t + v dt),$$

其中，$\widetilde{W}$ 为一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动.

3.5 鞅表示定理

我们现在可以用 Itô 公式来解一些 SDE，并且可以看到当测度变换时 SDE 是怎样变化的. 回答第 2 章中的定价问题的核心内容是离散树上的鞅测度这个概念，在此测度下，过程保持不变. 并且在此测度下，衍生证券的价格为一期望，并且期望的构造甚至还可以告诉我们证实这个价格的交易策略.

首先再描述一下

鞅

一个随机过程 M_t 关于测度 $\mathbb{P}$ 为鞅当且仅当

(i) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty$，对所有的 t，

(ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s$，对所有的 $s \leqslant t$.

第一个条件仅仅是技术上的润色，关键是第二个起作用. 鞅测度是这样的一个测度：在现在和过去的历史条件下，将来值的期望就等于现在的取值，不能有向上或向下的漂移.

一些例子：

(1) 平凡情况，常量过程 $S_t = c$（对所有的 t）关于任何测度都是鞅，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t \mid \mathcal{F}_s) = c = S_s$，对所有的 $s \leqslant t$ 和所有的测度 $\mathbb{P}$ 成立.

76

(2) 稍次之的情况，$\mathbb{P}$-Brown 运动是一个 $\mathbb{P}$-鞅. 凭直觉可猜到，Brown 运动不是始终向上也不是始终向下，而是两者都有可能. 但我们应该养成用规范语言来验证的习惯，要证：$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_s$. 当然已知增量 $W_t - W_s$ 服从正态分布 $N(0, t-s)$ 并独立于 $\mathcal{F}_s$，故有 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) = 0$，由此可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(W_s \mid \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s) = W_s + 0.$$

(3) 对那些只依赖发生在 T 时刻之前事件的未定权益 X，过程 $N_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_t)$ 为 $\mathbb{P}$-鞅（只假定满足技术上的限制 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(|X| < \infty)$.

例 (3) 就是生成鞅的一个很好的例子，我们将看到（实际上在第 2 章中已经看到）它还是衍生证券定价的核心. 为什么呢？首先要清楚 $N_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_t)$ 是一个明确定义的过程——变换过程的第一步就是对随机变量 X 引入时间列. 要想使 N_t 为 $\mathbb{P}$-鞅，就需要 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_t \mid \mathcal{F}_s) = N_s$，即只需满足

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X \mid \mathcal{F}_s).$$

即先给定 t 时刻以前的信息，再给定 s 时刻以前的信息，与给定 s 时刻以前的信息取条件期望是等价的. 条件期望的这种性质称为塔式定律（tower law）.

习题

3.10 设 W_t 为一个$\mathbb{P}$-Brown 运动，证明过程 $X_t = W_t + \gamma t$ 为一个$\mathbb{P}$-鞅当且仅当 $\gamma = 0$.

3.5.1 表示法

在第2章中我们有了二项式表示定理．若 M_t 和 N_t 都为$\mathbb{P}$-鞅，那么他们不仅仅名称相同，并且在局部它们只是尺度不同，每一个特定分支张开的幅度不同．我们可以用其他非平凡的$\mathbb{P}$-鞅适当地变换尺度后来表示 N_t 的变化．因此 N_t 自身可以表示成这些改变量的适当比例和的形式．

在连续情况下

鞅表示定理

假设 M_t 为一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，它的波动率 σ_t 满足附加条件：总是（以概率1）不为0．如果 N_t 为另一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，那么存在一个$\mathcal{F}$-可料过程 ϕ，使得 $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ 以概率1成立，并且 N 可以表示为

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}M_s.$$

进而，ϕ（在本质上）是惟一的.

在本质上这和前面的结果是一样的，只是用积分代替求和．正如我们所熟知的，转换到连续过程带来了形式上的不利．在这种情况下，$\mathbb{Q}$-鞅的波动率必须以概率1为正，否则第2章的结果可以没有改变地一直沿承下来．如果有一个测度$\mathbb{Q}$，使得 M_t 为一个$\mathbb{Q}$-鞅，那么任何其他的$\mathbb{Q}$-鞅都可以用 M_t 来表示，过程 ϕ_t 就是它们对应的波动率的比.

3.5.2 无漂移

我们还需要一个工具．对于鞅的讨论是鞅既没有向上的也没有向下的漂移的直观描述．虽然通过随机微分方程对漂移有了一个技术上的定义，但这却有一个显而易见的问题：没有漂移的随机过程是不是总是鞅？反过来，鞅是否总是能表示成 $\sigma_t \mathrm{d}W_t$ 的形式？其中 σ_t 为某个 $\mathcal{F}$-可料的扩散过程.

基本上有以下两个思路.

一个思路就是鞅表示定理．如果过程 X_t 为一个$\mathbb{P}$-鞅，W_t 为一个$\mathbb{P}$-Brown 运动，那么就存在一个$\mathcal{F}$-可料过程 ϕ_t，使得

78

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}W_s.$$

这恰为增量 $\mathrm{d}X_t = \phi_t \mathrm{d}W_t$ 的积分形式，它没有漂移项.

另一种思路（涉及技术上的限制）是正确的，但是更难些．以下供参考：

鞅的总结

设为 X 有波动率 σ_t 的随机过程（即 $\mathrm{d}X_t = \sigma_t \mathrm{d}W_t + \mu_t \mathrm{d}t$），满足技术上的条件限制 $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$，那么，

$$X \text{ 是一个鞅} \Longleftrightarrow X \text{ 无漂移}(\mu_t \equiv 0).$$

若不满足技术上的条件，那么一个无漂移的过程可能就不是鞅，称这样的过程为*局部鞅*.

3.5.3 指数鞅

技术上的限制很烦人. 例如，对一个指数过程（无漂移）取它的 SDE 为$\mathrm{d}X_t = X_t \sigma_t \mathrm{d}W_t$，条件（这种情况下，$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma_s^2 X_s^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\right] < \infty$）就很难验证. 但是对这些特殊的指数例子有下述更好的（更实用）验证方法：

指数鞅的总结

如果 $\mathrm{d}X_t = \sigma_t X_t \mathrm{d}W_t$ 对某个 $\mathcal{F}$-可料过程 σ_t成立，那么

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right)\right) < \infty \Rightarrow X \text{ 是鞅}.$$

也注意到此 SDE 的解为 $X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 \mathrm{d}s\right)$.

习题

3.11 若 σ_t为关于时间和轨道的有界函数，证明 $\mathrm{d}X_t = \sigma_t X_t \mathrm{d}W_t$是一个$\mathbb{P}$-鞅. [79]

3.6 复 制 策 略

我们已经有了诸如 Itô，Cameron-Martin-Girsanov 和鞅表示定理等数学工具，现在需要用它们来构造金融模型. 在诸如 Black-Scholes 这个最简单的模型中，市场由一个随机风险证券和一个无风险现金账户债券组成，并进而构造一个投资组合.

投资组合 (ϕ, ψ)

一个投资组合是由一对过程 ϕ_t 和 ψ_t 组成，其中 ϕ_t 和 ψ_t 为 t 时刻分别持有的风险证券和债券的份额，过程可以取正值或负值（允许无限量卖空股票或债券），持有的风险证券份额 ϕ_t 是$\mathcal{F}$-可料过程，它只依赖于 t 时刻之前（不含 t 时刻）的历史.

可以直观地来理解可料性，如果 ϕ 是左连续的（即当 s 从小于 t 的方向趋于 t 时，ϕ_s 趋于 ϕ_t），则 ϕ 是可料的. 如果 ϕ 仅仅是右连续的（即当 s 从大于 t 的方向趋于 t 时，ϕ_s 趋于

ϕ_t），则 ϕ 不是可料的.

3.6.1　自融资策略

复制策略来自组合的想法，(ϕ_t,ψ_t) 描述的是一种动态策略，表示在每个时间段持有的证券和债券的数量. 其中最重要的组合或策略是自包含的，或称自融资的.

一个组合是自融资的当且仅当其价值的变化仅仅依赖于资产的价格改变，在离散时间框架下可用一个差分方程表示，而在连续时间情形则等价于一个随机微分方程.

3.6.2　什么样的 SDE?

设 t 时刻股票价格为 S_t，债券价格为 B_t，组合 (ϕ_t,ψ_t) 在 t 时刻的价值为 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$. 在下一个时段，有两个变化：由于价格 S_t 和 B_t 的变化，老组合的价值也发生变化；需要对老组合按交易策略 (ϕ,ψ) 调整给出一个新组合. 如果调整的代价正好等于由组合所获得的收益或损失，则不需要增加或减少额外的资本，这个组合就是自融资的.

80

在离散情形就得以下的差分方程

$$\Delta V_i = \phi_t \Delta S_t + \psi_t \Delta B_t.$$

在连续时间情形得到一个随机微分方程：

自融资性质

如果 (ϕ_t,ψ_t) 是一个组合，股票价格为 S_t，债券价格为 B_t，则 (ϕ_t,ψ_t) 是自融资的当且仅当 $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

假设股票价格为 S_t，服从简单的 Brown 运动 W_t（因此对所有的 t，有 $S_t = W_t$）债券价格 B_t 为常数（对所有的 t 有 $B_t = 1$）. 什么样的组合是自融资的呢?

(1) 假设 $\phi_t = \psi_t = 1$ 对所有的 t 成立. 如果自始至终持有一个单位的股票和一个单位的债券而没有变化，则组合的价值（$V_t = W_t + 1$）可能波动，但它的波动完全是由于股票价格的变动引起的. 直观地说，为保持组合 (ϕ_t,ψ_t) 不需要投入额外的资金，也没有撤出资金，因此这个组合一定是自融资的.

可以检验，$V_t = W_t + 1$ 隐含了 $dV_t = dW_t$，也就是所要求的 $\phi_t dS_t + \psi_t dB_t$（记住 $dB_t = 0$）.

(2) 假设 $\phi_t = 2W_t$ 且 $\psi_t = -t - W_t^2$，这里 (ϕ_t,ψ_t) 是一个组合，ϕ_t 是可料的，价值 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = W_t^2 - t$，由 Itô 法则，$dV_t = 2W_t dW_t$，等于所要求的 $\phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

习题

81

3.12　证明 (2) 中的 Itô 法则（同时证明 $W_t^2 - t$ 是鞅）.

这似乎有点怪异，持有相当 2 倍价格份额的股票，虽是类似玩令人心跳的游戏的策略，却正好被股票的收益和改变债券的持有量 $-(t + W_t^2)$ 抵消了. 我们可以遵循 (ϕ_t,ψ_t) 策略

（在一个完备市场中）而无须增加资金.

第二个例子说明自融资并不是任何一个组合本身就有的性质，可以用 Itô 准则来检验，但是如果 ψ_t 不同，则自融资性质可能不满足，(ϕ_t, ψ_t) 策略将要求注入或撤出部分资金. 因此每当宣称组合是自融资时，必须通过 Itô 准则来检验 SDE.

3.6.3 交易策略

现在可以定义一个未定权益的复制策略了.

复制策略

假设在一个只有一种无风险债券 B 和一种风险证券 S 的市场里，风险证券 S 的波动率为 σ_t，有一个在时刻 T 到期的未定权益 X. 关于 X 的一个复制策略是一个自融资的组合 (ϕ_t, ψ_t)，它满足 $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 \mathrm{d}t < \infty$ 且 $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$.

为什么对复制策略感兴趣呢？与在离散市场模型需要它们的理由相同，未定权益 X 给出了某种证券在时刻 T 需要支付的数值，我们要的是在 S 和 B 模型下它现在的价格.

如果存在一个复制策略 (ϕ_t, ψ_t)，则 X 在时刻 t 的价格一定是 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$.（特别地在 0 时刻的价格为 $V_0 = \phi_0 S_0 + \psi_0 B_0$.）如果价格比这低的话，市场投资者可以在时刻 t 买入 1 个单位的未定权益，同时卖出 ϕ_t 单位的 S 和 ψ_t 单位的 B 来进行对冲，并一直持有空头 (ϕ, ψ) 直到时刻 T. 因为 (ϕ, ψ) 是自融资的，组合在时刻 T 的价值必定为 X，买入的权益和卖出的组合在时刻 T 可以安全地互相抵消，并且在时刻 t 和 T 之间不需要额外的资金投入. 但由于两者价值的差异使投资者可以得到无风险的收益，而所谓 1 个单位可以是很多资金，无风险意味着可以无顾虑地进行套利. [82]

当然如果未定权益的价格高于 V_t，则可以卖出未定权益，同时买入自融资的 (ϕ, ψ) 达到套利的目的. 复制策略，如果存在的话，不仅仅是在到期支付日，而且在任何时候都约束了未定权益 X 的价格.

可以给出一个成功的计划. 用一个充分复杂的股票价格过程建立市场模型来满足实际的需要，然后用手中任何的工具对所有有用的未定权益 X 找到相应的复制策略. 如果行的话，就可以对模型中的未定权益定价. 本书后半部分将包含进一步增加模型和未定权益的复杂性的内容.

3.7 Black-Scholes 模型

需要一个模型以便深入研究市场. 在第 2 章结束时我们已经有了工具并看到了大概的方法. 利用 3.1 节中的股票模型，通过应用 Cameron-Martin-Girsanov 定理（3.4 节）将它变成鞅，然后用鞅表示定理（3.5 节）对每个未定权益构造出一个复制策略. Itô 准则将发挥其作用.

3.7.1 模型

第一个模型：基本的 Black-Scholes 模型

假设存在确定的常数 r，μ 和 σ 使得债券价格 B_t和股票价格 S_t服从以下方程

$$B_t = \exp(rt),$$
$$S_t = S_0\exp(\sigma W_t + \mu t),$$

其中 r 是无风险利率，σ 是股票的波动率，μ 是股票的漂移. 没有交易成本，两种证券都可以随时自由地交易，在所给定的价格可以做多或做空.

[83] 需要一个股票价格行为的模型，它既要充分得简单使得能实际上用之发现复制策略，但又不能太简单，太简单的话会使我们无法相信其就是实际中的模型.

遵循 Black-Scholes 的步骤，假设市场上只有一种无风险且有常利率的现金债券和一种可交易的其价格服从指数 Brown 运动的股票.

正如在 3.1 节中已经看到的那样，这是最低程度地拟合实际市场，但后面将看到这已经是相当难的出发点了.

3.7.2 零利率

如果有一个参数是在对 Black-Scholes 模型进行第一轮分析时制造麻烦的话，那就是利率 r. 它引起的问题与其说是致命的，倒不如说是乏味的，然而我们的工具足以应付它了，但暂时为简化起见，设 r 等于零.

现在开始分析，对一个任意的未定权益 X，其值在时刻 T 是已知的，能否为它找到一个复制策略 (ϕ_t,ψ_t).

3.7.3 发现一个复制策略

三步复制法

（1）找到一个测度$\mathbb{Q}$，使得在这个测度下 S_t是一个鞅.

（2）构造过程 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$.

（3）找到一个可料过程 ϕ_t，使得 $dE_t = \phi_t dS_t$.

从根本上说可以用前面描述的工具来完成这个任务. 第 1 步将应用 Cameron-Martin-Girsanov 定理（3.4 节），而第 3 步将应用鞅表示定理（3.5 节）.

步骤 1

基于两个不同的理由，首先需要应用 Cameron-Martin-Girsanov 定理，其次需要能确定对

[84] 给定的$\mathbb{Q}$，S_t 是否是一个$\mathbb{Q}$-鞅，因为我们须找到 S_t 服从的 SDE.

因为股票遵循指数 Brown 运动，$S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$，因此股票价格的对数 $Y_t =$

$\log(S_t)$，服从一个简单的有漂移的 Brown 运动 $Y_t = \sigma W_t + \mu t$. 由此易写出 Y_t 服从的 SDE：$dY_t = \sigma dW_t + \mu dt$. 但是，由 Itô 准则可以将 $S_t = \exp(Y_t)$ 的 SDE 写成如下形式：

$$dS_t = \sigma S_t dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) S_t dt.$$

为了使 S_t成为一个鞅，首先要消除 SDE 中的漂移. 如果令 γ_t为一个常值过程 $\gamma = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$ ，则根据 C-M-G 定理可知存在一个测度$\mathbb{Q}$ 使得 $\tilde{W}_t = W_t + \gamma t$ 是一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动.（由于 γ_t是常数，因此自然满足技术性的有界条件.）将其代入，SDE 变成

$$dS_t = \sigma S_t d\tilde{W}_t.$$

没有了漂移项，就能使 S_t成为一个$\mathbb{Q}$-鞅. 指数鞅（3.5 节）包含了为使 S_t成为一个$\mathbb{Q}$-鞅 σ 应满足的条件. 当 σ 是常数时，该条件成立，即 S_t一定是一个$\mathbb{Q}$-鞅，由此$\mathbb{Q}$ 是关于 S_t的鞅测度.

步骤 2

给定$\mathbb{Q}$ ，可以将 X 变换为过程 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$，也就是在 3.5 例（3）中讨论过的，一个$\mathbb{Q}$-鞅.

步骤 3

因为存在一个$\mathbb{Q}$ ，使得在这个测度下 E_t和 S_t都是$\mathbb{Q}$-鞅，因此可以用鞅表示定理. 存在一个可料过程 ϕ_t，用它可以从 S_t来构造 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t)$.（为应用这个定理，需要验证 S_t的波动率始终为正，这点是成立的因为波动率就是 σS_t，而 σ 和 S_t都是正的.）形式上，

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) + \int_0^t \phi_s dS_s,$$

或者，$dE_t = \phi_t dS_t$. 所以鞅表示定理告诉我们一个重要事实：给定$\mathbb{Q}$ ，使得 S_t是有正波动率的$\mathbb{Q}$-鞅，$dE_t = \phi_t dS_t$对某个 ϕ_t成立.

85

我们需要一个复制策略（ϕ_t，ψ_t），到现在为止已完成了一半了，接下来要确定为使组合的价值为 E_t时 ψ_t只能是什么.

3.7.4 复制策略

我们的策略是：

- 在 t 时刻持有 ϕ_t单位的股票.
- 在 t 时刻持有 $\psi_t = E_t - \phi_t S_t$ 单位的债券.

它是自融资的吗？在 t 时刻组合的价值为 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = E_t$，因为债券 B_t 恒等于 1，所以 $dV_t = dE_t$，但是由鞅表示定理当然就有 $dE_t = \phi_t dS_t$.

因为 $dB_t = 0$，就得到了自融资的条件 $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

因此策略在终端时刻 T 的价值 V_T等于 $E_T = X$，我们就有了 X 的一个复制策略——即在任何时刻都有 X 的一个套利价格. 特别地在零时刻 X 的套利价格——组合（ϕ_t,ψ_t）在零时

刻的价值，为价格 E_0，或者$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$. 换言之，未定权益 X 的价格等于使得 S_t成为鞅的那个测度下的期望值.

有三点值得我们总结，首先是任何未定权益都存在复制策略的事实. 我们所选用的模型并非离实际太远，它有恰当的表现和合适的随机性. 因此我们也许会放弃寻找其他的复制策略. 尽管缺乏对于未定权益最终价值的知识但经过一系列特别的努力之后，我们终于可以按照上述方式在市场里进行交易了.

第二点也是很重要的一点在于，证券的价格有这么一种简单的形式——未定权益的期望值. 最容易忘记的事情是它不是未定权益关于 S_t的实际测度的期望值，该实际测度是有漂移 μ 和波动率 σ 的指数 Brown 运动. 在这个测度下的期望能给我们的是未定权益的支付在一个很长时间的平均值，虽然它可以提供是否值得长时间持有未定权益的有用的信息，但它不提供价格. 存在一个复制策略，从而存在未定权益的一个套利价格，套利永远占优势.

86

价格是一个期望，但它不是传统统计意义下期望，只是我们所相信的股票的漂移 μ 正好满足使 S_t成为鞅（$\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$）时那个测度下的期望.

第三点是在鞅测度下过程 S_t 表达式的简单性. 如果确实想开始计算某个特定未定权益相关的证券的价格，就必须要会在鞅测度$\mathbb{Q}$下计算未定权益的期望值. 因为未定权益依赖于 S_t，这通常需要计算在测度$\mathbb{Q}$下 S_t值的某个函数直到时刻 $t=T$ 的期望值. 如果在$\mathbb{Q}$下 S_t是不太合意的过程时，那么这个任务也不那么容易. 但 S_t在$\mathbb{Q}$下也是指数 Brown 运动，如果解 SDE，则得

$$S_t = \exp\left(\sigma\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right),$$

并且可以发现 S_t有相同的常数波动率 σ，和一个新的但也是常数的漂移 $-\frac{1}{2}\sigma^2$，所以如果 S_t在原来的测度下容易处理的话，在鞅测度下也容易处理.

3.7.5　非零利率

现在可以重新考虑利率 r，如果 r 不等于零会发生什么？我们不能忽略它. 如果忽略了，考虑一个对某个价格 k 的一个未定权益 S_T-k 的远期合约，我们已经知道使得远期合约在零时刻价值为零的 $k=S_0e^{rT}$，这一点不难通过无套利讨论得到. 但当 r 等于零时的法则，即简单地在鞅测度下取未定权益的期望值对 S_t已不再适用，事实上，

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(S_T - S_0 e^{rT}\right) = S_0(1-e^{rT}) \neq 0 .$$

即使取贴现也无济于事，所以找一个测度使得在这个测度下 S_t成为鞅的法则只在 r 等于零时有效. 当 r 不等于零时，现金的不断增长就起作用了.

让我们猜测一下，如果现金的增长处理起来比较麻烦的话，可以通过把所有东西取贴现就可以去掉它. 称 B_t^{-1} 为贴现过程，就得到贴现股票 $Z_t=B_t^{-1}S_t$和贴现权益 $B_T^{-1}X$.

87

通过贴现后，又可以把利率 r 看作零，也许以上的分析方法又可以用了. 当然这只是直观的感觉，还需要加以证明. 如果不能找到复制策略，尽管如我们猜测的有吸引力，那也是错的.

幸运的是，我们能找到复制策略，集中在贴现股票过程 Z_t，不难写出 SDE

$$dZ_t = Z_t(\sigma dW_t + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)dt).$$

习题

3.13 证明上述命题.

步骤 1

为使 Z_t 成为鞅，如前一样可以应用 C-M-G 定理，只需在标的 Brown 运动中引入漂移 $(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$，从而存在（另一个）与原来的测度 $\mathbb{P}$ 等价的测度$\mathbb{Q}$ 和一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\widetilde{W}_t$ 使得

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t.$$

因此在$\mathbb{Q}$ 下 Z_t 无漂移，是个鞅.

步骤 2

需要表示贴现权益的一个过程，它也是一个$\mathbb{Q}$-鞅. 如前一样，它可以用条件期望 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$ 表示.

步骤 3

贴现股票过程 Z_t 是一个$\mathbb{Q}$-鞅，因此贴现未定权益 E_t 的条件期望过程也是$\mathbb{Q}$-鞅. 由鞅表示定理可得到一个可料的 ϕ_t 使得 $dE_t = \phi_t dZ_t$.

要用实际股票的数量来表出实际的未定权益，但贴现之后，可以通过持有 ϕ_t 单位贴现的股票来表示贴现未定权益. 因此好比是猜测，同样可以尝试着从实际市场中找出 ϕ_t. 88

对债券的持有会怎么样呢？贴现之后持有的债券份额为 $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$，因此也可以在实际市场中尝试. 可以确认如下的事实，在时刻 T 将 ϕ_t 单位的股票和 ψ_t 单位的债券，它们的总价值为 $\phi_T S_T + \psi_T B_T = B_T E_T = X$.

因此复制策略为

- 在 t 时刻持有 ϕ_t 单位的股票，且
- 在 t 时刻持有 $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ 单位的债券.

这是否正确？在 t 时刻组合 (ϕ_t, ψ_t) 的价值为 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t E_t$，根据习题3.6，可将 dV_t 表示为

$$dV_t = B_t dE_t + E_t dB_t.$$

但是 dE_t就是 $\phi_t dZ_t$（这个事实来自鞅表示定理），因而 $dV_t=\phi_t B_t dZ_t+E_t dB_t$，通过简单运算可得 $E_t=\phi_t Z_t+\psi_t$，由此

$$dV_t=\phi_t B_t dZ_t+(\phi_t Z_t+\psi_t)dB_t=\phi_t(B_t dZ_t+Z_t dB_t)+\psi_t dB_t.$$

但是再由习题3.6得，$d(B_t Z_t)=B_1 dZ_t+Z_t dB_t$，因为 $S_t=B_t Z_t$，就得

$$dV_t=\phi_t dS_t+\psi_t dB_t.$$

所以 (ϕ_t,ψ_t) 是自融资的.

自融资策略

持有股票 S_t和无波动现金债券 B_t的组合策略 (ϕ_t,ψ_t) 有价值 $V_t=\phi_t S_t+\psi_t B_t$，其贴现后价值为 $E_t=\phi_t Z_t+\psi_t$，其中 Z 是贴现股票过程 $Z_t=B_t^{-1}S_t$，因此如果 $dV_t=\phi_t dS_t+\psi_t dB_t$，或等价地 $dE_t=\phi_t dZ_t$，则策略是自融资的.

一个策略如果其价值的改变仅仅是由资产价格的变化所引起的，或等价地其贴现价值的变化仅仅是由资产的贴现价格的变化所引起的，则该策略是自融资的.

89

因为我们知道 $V_T=X$，则证明了 (ϕ_t,ψ_t) 是 X 的一个复制策略，我们的猜测是正确的.

小结

假设对连续可交易的股票和债券有 Black-Scholes 模型，即假设存在常数 r，μ 和 σ 使得它们的价格分别服从方程 $S_t=S_0\exp(\sigma W_t+\mu t)$ 和 $B_t=\exp(rt)$，则在时刻 T 已知的所有可积的权益 X 伴随有复制策略 (ϕ_t,ψ_t). 进而这样一个权益 X 的套利价格为

$$V_t=B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t)=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X\mid\mathcal{F}_t),$$

其中$\mathbb{Q}$ 是关于 $B_t^{-1}S_t$的鞅测度.

这个重要的测度$\mathbb{Q}$ 不是使股票成为鞅的测度，而是使贴现股票成为鞅的测度，并且权益的套利价格是贴现权益在$\mathbb{Q}$ 下的期望值.

因此当利率非零时，新的法则又如何呢？它们恰是旧法则的贴现版本.

三步复制法（贴现情形）

（1）找到一个测度$\mathbb{Q}$，使得在这个测度下贴现股票价格 Z_t是一个鞅.

（2）构造过程 $E_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t)$.

（3）找到一个可料过程 ϕ_t，使得 $dE_t=\phi_t dZ_t$.

3.7.6 看涨期权

下面来给某些东西定价. 跟随 Black 和 Scholes 我们来给看涨期权定价. 看涨期权是在

90

某个特定的日期，例 T，以事先确定的价格购买一个单位股票的一种权利而不是义务. 设这

个事先确定的价格为 k（用金融的术语，称为期权的敲定价），则这个权益在形式上就记为 $\max(S_T-k,\ 0)$，或更方便地记为 $(S_T-k)^+$.

首先要找到复制策略此处为期权在零时刻的价值 V_0，前面的法则告诉我们这个价值等于

$$e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((S_T-k)^+),$$

其中$\mathbb{Q}$ 是关于 $B_t^{-1}S_t$的鞅测度.

但是如何找到这个值呢？首先注意到这个权益的简单性，价值 $(S_T-k)^+$ 只依赖于一个时刻——到期日 T，因此要计算这个权益的期望，只需找到 S_T在$\mathbb{Q}$ 下的边际分布．为此，考察一下用$\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\widetilde{W}_t$ 表出的过程 S_t，因为

$$\mathrm{d}(\log S_t)=\sigma\mathrm{d}\widetilde{W}_t+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t,$$

如果记股票在零时刻的价格 S_0 为 s，就有 $\log S_t=\log s+\sigma\widetilde{W}_t+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t$，从而 $S_t=s\exp(\sigma\widetilde{W}_t+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t)$.

所以 S_T的边际分布等于 s 乘以均值为$\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T$、方差为 σ^2T 的正态分布的指数分布.

由此如果令 Z 为一服从正态分布 $N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2T,\ \sigma^2T\right)$的随机变量，则 S_T可表示为 $se^{(Z+rT)}$，权益可表示为 $e^{-rT}\mathbb{E}((se^{(Z+rT)}-k)^+)$，它等于

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}}\int_{\log(k/s)-rT}^{\infty}(se^x-ke^{-rT})\exp\left(-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\sigma^2T\right)^2}{2\sigma^2T}\right)\mathrm{d}x.$$

通过变量代换可以把这个积分分解为几项关于标准正态累积分布的积分之和. 如果用 $\Phi(x)$ 表示 $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-y^2/2)\mathrm{d}y$，正态分布 $N(0,1)$ 小于 x 的概率，我们就可以计算 $V_0=V(s,T)$，其中

Black-Scholes 公式

$$V(s,T)=s\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{k}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{k}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

这就是欧式看涨期权定价的 Black-Scholes 公式，（至于看跌期权，以价格 k 出售一个单位股票的权利，相当于一个看涨期权减去一个远期——称此为卖出—买入平价关系.）

91

习题

3.14 找到变量代换关系以证明 Black-Scholes 公式.

3.8　Black-Scholes 的应用

如果某个股票有常值波动率 18% 和常值漂移 8%，连续复利为常值 6%，一个在现价为 \$20，而在 2 年后以 \$25 的价格买入股票的期权的价值是多少呢?

上述情形符合 Black-Scholes 的条件，其中 $s=20, k=25, \sigma=0.18, r=0.06$，并且 $t=2$，可以计算得 $V_0=\$1.221$.

习题

3.15　需要关于漂移的什么信息?

3.8.1　对价格的依赖性

当股票当前价格 s 远小于敲定价 k 时，公式本身的值变小，表示期权处于价外，在期限内不大可能恢复. 反之，如果 s 远大于 k，则期权丧失了大部分的可选择性，而变成了一个远期. 对应地，期权价格近似于 $s-ke^{-rT}$，等于时刻 T 敲定价为 k 的股票远期的当前价值.

3.8.2　对时间的依赖性

当距离到期日 T 的时间越来越小时，价格的选择变得越来越少，期权的价值也越来越接近权益关于当前价格的价值 $(s-k)^+$.

时间越长，期权的价值越大. 一个期权的到期日几乎为无穷时，其价值接近 s，因为价格 k 现在的成本几乎为零. 从图 3-14 可见当距离到期日的时间趋于零时，曲线逼近期权的形状 $(s-k)^+$.

92

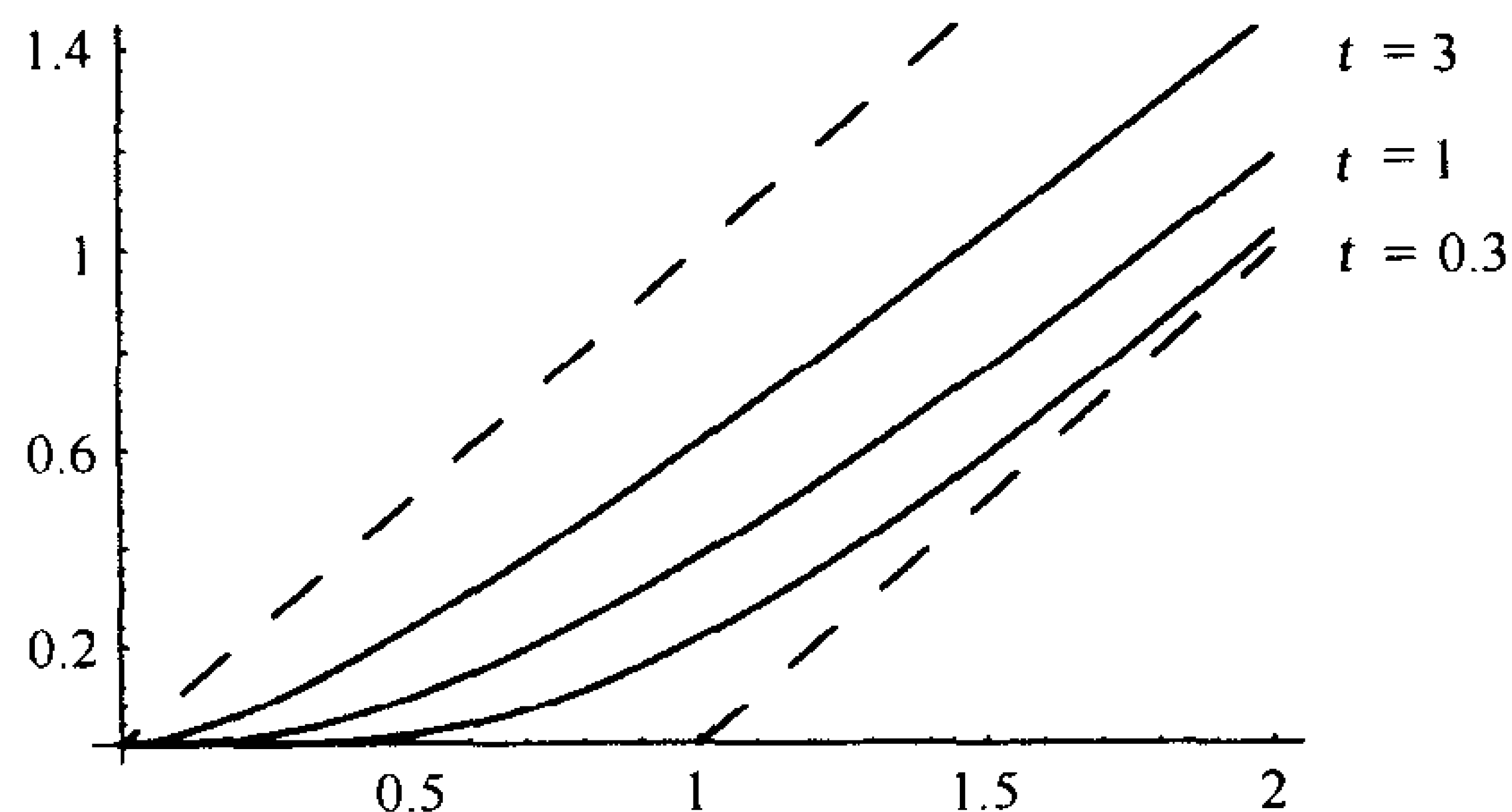


图 3-14　对应股票价格的期权价格图，时间 3，1 和 0.3. 敲定价 $k=\$1$，利率 $r=0$，波动率 $\sigma=1$

3.8.3 对波动率的依赖性

在其他条件都相同的情况下，股票波动得越厉害，期权的价值就越高. 一个极端，如果 σ 很小，期权就像一个无风险债券，其价值为 $(s-ke^{-rT})^+$，也即如果期权在价内，就等于对应远期的价值，否则就等于零. 在另一个极端，如果 σ 很大，则期权价值为 s.

3.8.4 美式期权

有时候一个期权比之只在到期日的两个选择有更多的选择性. 众所周知，美式期权就是这类证券. 它给予在到期日 T 之前任何时间包括到期日以敲定价 k 买入一个单位股票的权利，而不仅仅限于到期日，期权的买方必须随时决定在何时是否执行期权.

美式期权的买方有权选择在何时执行，而这个选择只能依据直到现在的信息来作出，这样一个（随机）时刻称为停时（stopping time）. 在停时 τ 执行期权的策略对应的支付为

$$(S_\tau - k)^+ \qquad \text{在时刻 } \tau.$$

如果期权的卖方事先知道投资者将使用什么停时，他在零时刻对支付进行套期保值的成本为 [93]

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r\tau}(S_\tau - k)^+).$$

当不知道用什么 τ 时，只能做最坏的准备，要价为最大值（关于所有可能的停止策略）

$$V_0 = \sup_\tau \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r\tau}(S_\tau - k)^+).$$

有选择性的证券的定价

一般来说，如果期权的买方有一组选择 A，选择 A 中某个 a 以后，在时刻 T 可以得到的支付为 X_a，那么期权的卖方对此应该要价

$$V_0 = \sup_{a\in A} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}X_a).$$

如果买方不是最优地执行期权，则卖方的套期保值在到期日 T 就产生了顺差.

3.8.5 那个套期保值是完全的

回到原来的欧式期权，一件有用的事情是了解实际的复制策略需要什么，亦即找到在每个时刻实际需要多少股票来人为地复制权益.

股票的数量 ϕ_t 来自鞅表示定理，但不幸的是定理只证明了 ϕ_t 的存在性. 然而，鞅表示定理的核心告诉我们贴现权益可以由贴现股票复制的理由是，在同一测度下是鞅，其中一个是另一个局部的变尺度的表示形式，过程 ϕ_t 正是波动的比率. 因此直观地说，如果考察由于股票价格的运动引起的期权价值的变化与所用的股票价格变动的比例，这个比例就应当是 ϕ_t. 如果有一个有充分约束的权益，其中为给这个权益定价所需要的来自 σ 域流的信息就是当前时刻的股票价格，而且权益价值和当前股票价格之间隐含的函数关系是光滑的， [94] 则可以猜测期权价值关于股票价格的偏导数就是我们要的 ϕ_t.

对于经常遇到的权益只依赖于终时价值的情况，期权价值是当前股票价格的有较好性质的函数. 假如权益 X 是股票终时价格的函数，对某个函数 $f(s)$，$X = f(S_T)$. 则有以下结果.

用终时价值定价

如果权益 X 等于 $f(S_T)$ 对某个 f 成立，则该权益在 t 时刻的价值等于 $V_t = V(S_t, t)$，其中 $V(s,t)$ 满足以下方程

$$V(s,t) = \exp(-r(T-t))\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(S_T) \mid S_t = s),$$

而且交易策略为 $\phi_t = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, t)$.

为什么？考虑 dV_t，期权价值的一个无穷小变化，记住 $dS_t = \sigma S_t d\widetilde{W}_t + rS_t dt$，则由 Itô 准则得

$$dV_t = d(V(S_t,t)) = \left(\sigma S_t \frac{\partial V}{\partial s}\right) d\widetilde{W}_t + \left(rS_t \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt .$$

但由自融资条件有 $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$，并且因为 $dB_t = rB_t dt$，我们有

$$dV_t = (\sigma S_t \phi_t) d\widetilde{W}_t + (rS_t\phi_t + r\psi_t B_t) dt.$$

但是 SDE 的表示是惟一的，因此波动率项必定相等，即得 $\phi_t = \frac{\partial V}{\partial s}$. 在任何阶段复制组合中股票的数量等于期权价值关于股票价格的偏导数.

利用 ϕ_t 的上述替代品和 $V_t = S_t\phi_t + \psi_t B_t$，由于两个 SDE 漂移项相等，可得关于 V 的偏微分方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 .$$

[95] 这个 PDE，加上边界条件 $V(s,T)$ 必须等于 $f(s)$，由此给出另一个求解定价方程的途径.

3.8.6　严格的 Black-Scholes 套期保值

如前所述，看涨期权是一个终值权益，所以也能够找到它自身套期保值的形式. 持有的股票的数量等于价值函数关于股票价格的导数，即

$$\phi_t = \frac{\partial V}{\partial s}(S_t, T-t) = \Phi\left(\frac{\log\frac{S_t}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

因为 ϕ 的取值始终在 0 与 1 之间，我们只需有一个持有股票的多头. 同时在任何时刻持有的债券价值为

$$B_t\psi_t = -ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\log\frac{S_t}{k}+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

虽然永远是借入，但以敲定价 k 为界.

当时间趋近到期日时有两种可能. 如果期权是价外，即股票价格小于敲定价，则持有的股票和债券的数量都趋于零，反映了期权无价值性的增长. 反之如果股票价格大于敲定价，则股票的持有量上升为 1 个单位，而债券的价值趋于 $-k$. 这个组合正好平衡了一个单位的股票相当于现金数量 k 的需求.

例 连续时间下的套期保值

看看在实际中是怎么运作的. 以下图 3-15a 和图 3-15b 是股票价格从 \$10 开始后的两条轨道，它们都服从波动率为 20%、增长漂移为 15% 的指数 Brown 运动.

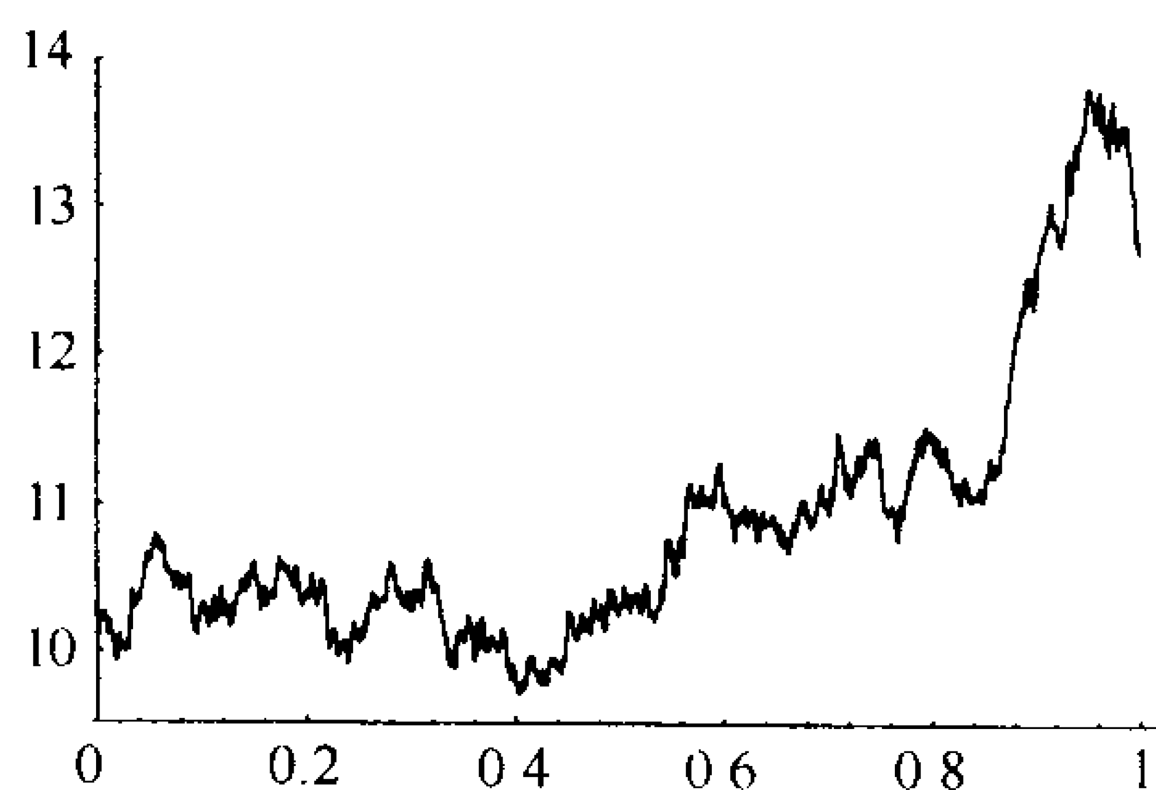


图 3-15a 股票标价格（A）



图 3-15b 股票标价格（B）

96

对以该股票为标的资产在时刻 $T=1$，敲定价为 \$12 的期权来定价，设利率为 5%，对这两种情况都可以计算期权的价值和为对合约套期保值所需持有的股票的数量.

在情况（A），过程见图 3-16 所示.

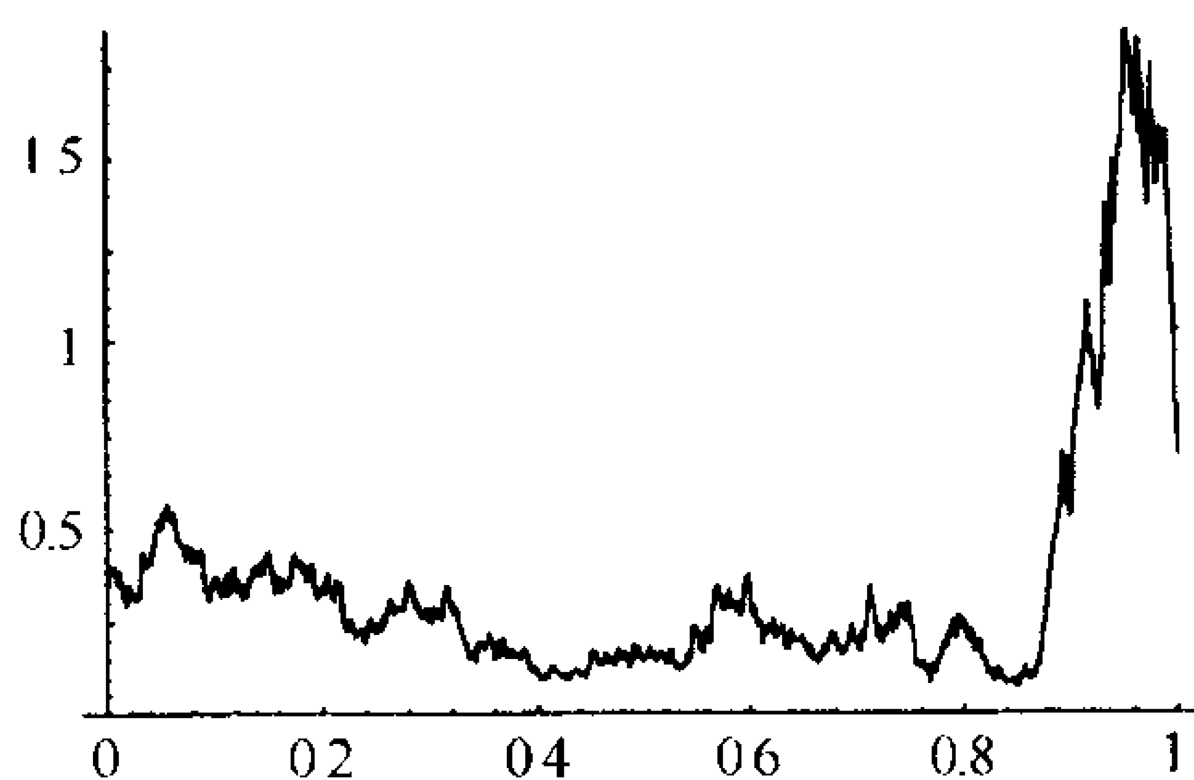


图 3-16a 期权价值（A）

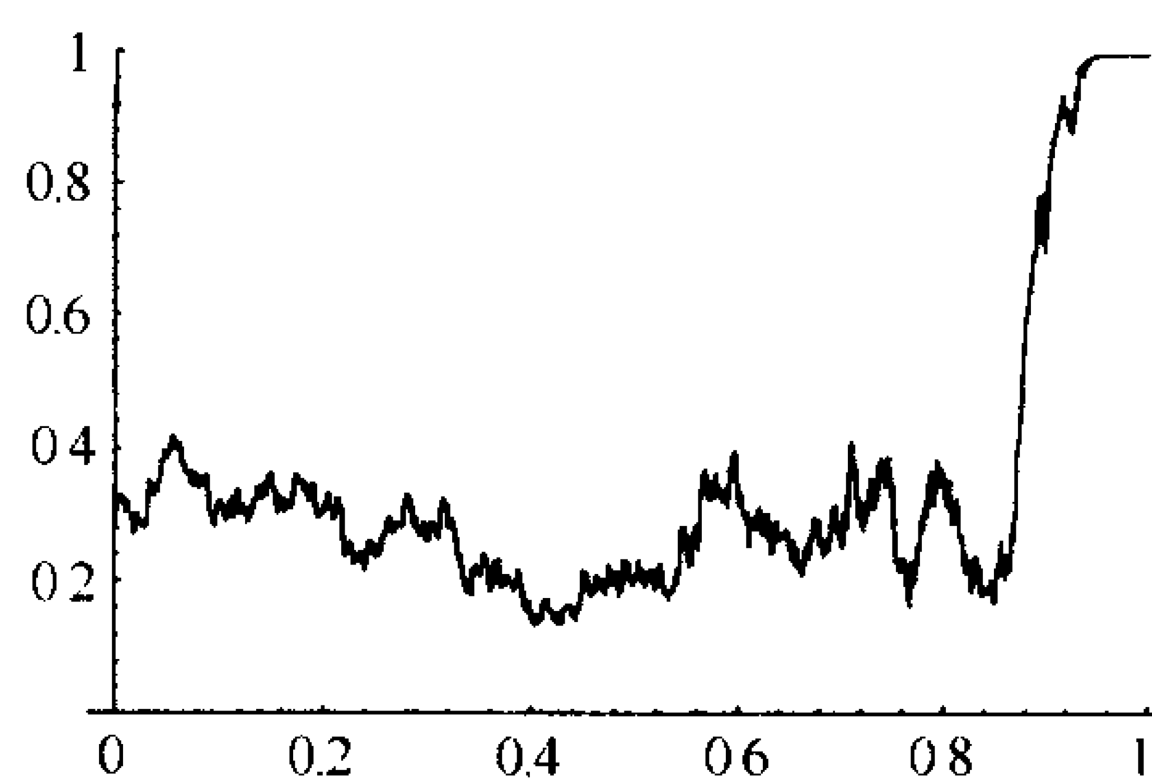


图 3-16b 股票套期保值（A）

随着时间的推移，期权变成价内，期权价值的运动像股票价格的运动，套期保值越来越接近1，意味着将执行这个期权.

在情形（B），过程见图3-17所示.

这时，不再执行期权，随着时间的推移，期权的价值趋于零，套期保值也趋于零.

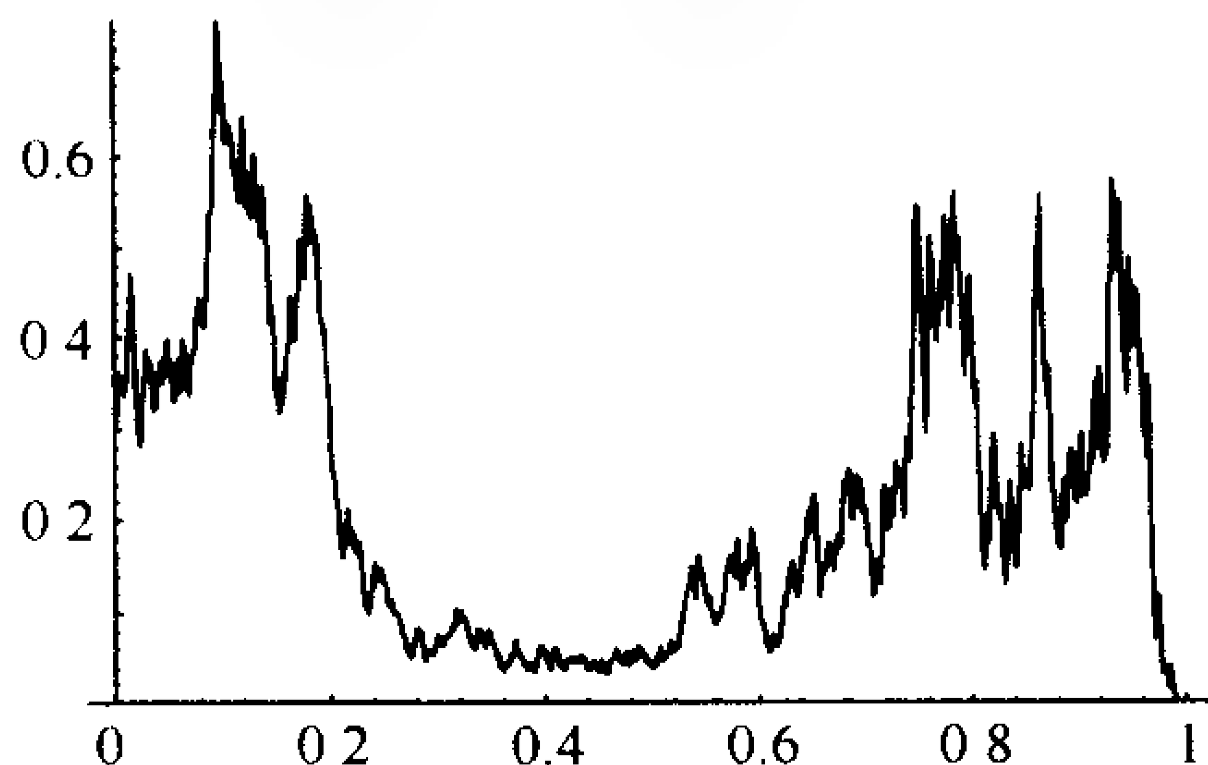


图3-17a　期权价值（B）

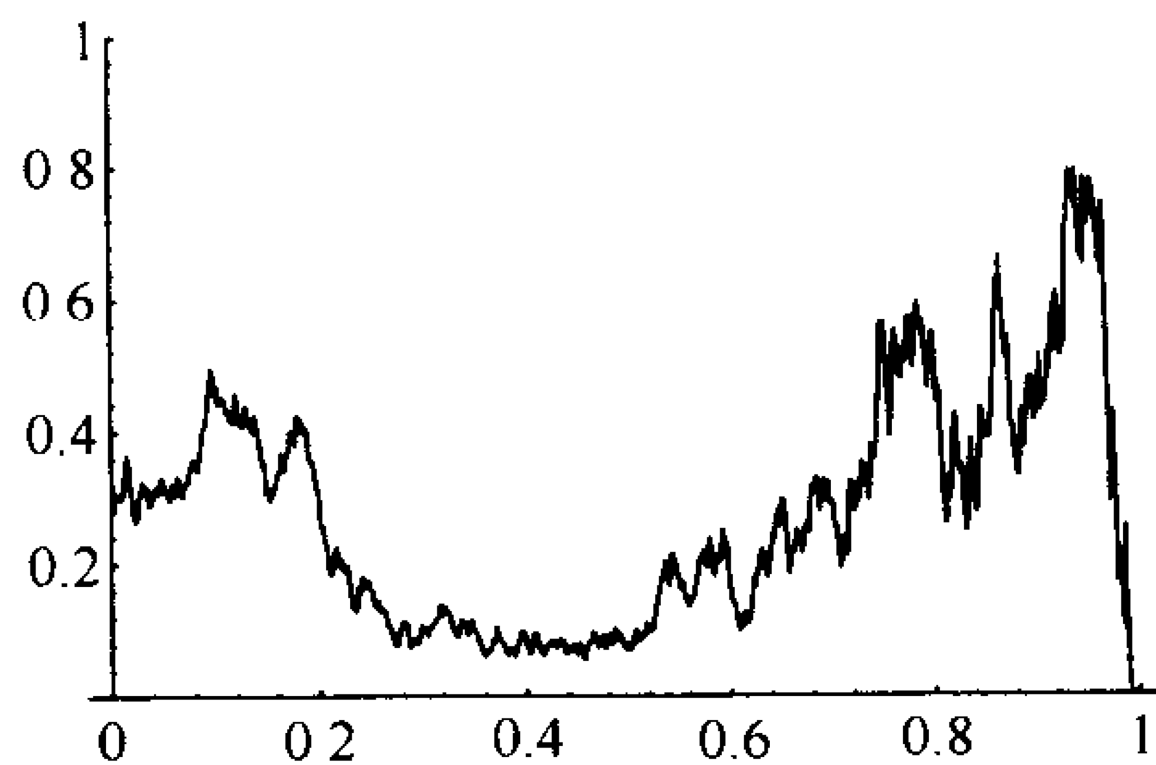


图3-17b　股票套期保值（B）

习题

3.16　一个股票当前价格为\$10，价格变动服从增长向上漂移一年为15%（连续时间复利）、波动率一年为20%的指数Brown运动，当前利率为5%. 问以该股票为标的资产在时刻$T=1$，敲定价为\$12的期权价值是多少？ [97]

3.17　对同一股票，如果某个权益是在一年的时间里当股票价格大于\$10，就支付\$1，问这个权益的价值是多少？

3.8.7　结论

即便股票遵循随机模型，也能复制任何权益. 我们没有权利指望什么东西，复制组合的价值等于在使贴现股票成为鞅的测度下贴现权益的期望价值. 进而，变换到鞅测度对于过程S_t有很明显的简单影响，即只有漂移改变为另一常数，股票仍保持了指数Brown运动，波动率σ也保持不变.

上述三点试图使结果比实际上看起来容易些，某些微妙而漂亮的结论隐含在所有公式后面. 在我们继续讨论之前，让我们停一停，欣赏一下其中的美妙吧. [98]

第4章 市场证券的定价

在本章之前我们已经知道，从数学角度来看 Black-Scholes 模型是比较简单的，从金融角度上看则更加简单. 它所考虑的金融资产是按既定价格可以自由交易的股票，人们持有股票无需额外的成本也无额外的利益. 它还不考虑交易成本和市场流动性等因素. 可以说没多少金融资产符合它的要求，实际上就连一些常见的金融产品——外汇，股权和债券等都不属于该模型所设计的简单的资产类别中. 外汇涉及两种支付利息的资产：股权要支付红利，债券要支付息票. 对于这些金融资产，仅仅重新建立适合它们的数学模型就够我们忙乎的，同时还需要让大家明白它们的金融意义.

4.1 外 汇

正如股票市场一样，人们在外汇市场上持有货币这种基础资产也是具有风险的. 比如说，1 英镑（英国货币）的美元价格每时每刻都在变化，就像一只美国的股票一样. 伴随外汇市场上的汇率风险，人们对于基于未来的汇率（一种货币用另一种货币表示的价格）的衍生证券的需求也就应运而生.

4.1.1 远期合约

考察一份远期交易：一个美元投资者想锁定在未来某个交易日 T 获取 1 英镑的美元成本. 正如股票一样，复制这份远期合约的交易策略是静态的. 买入英镑，同时售出美元. 但是这两种货币现金都是有利息收入的，并且正如简单 Black-Scholes 模型一样，我们所持有的不是现金而是现金债券.

具体说来，假设美元利率为常数 r，英镑利率为常数 u，目前购买 1 英镑需要 C_0 美元. 现考虑下面的静态复制策略：在时刻 t，

- 持有 e^{-uT}单位的英镑现金债券，同时
- 持有 C_0e^{-uT}单位的美元现金债券的空头头寸.

显然这一投资组合在 0 时刻的价值是 0，而在 T 时刻将得到 1 英镑，同时支付美元债券空头头寸的价值 $C_0e^{(r-u)T}$——这正是远期交易 1 英镑的美元价格.

与之相比，股票的远期交易价格是 S_0e^{rT}. 将 Black-Scholes 模型推广到外汇市场情形下，必须注意此时两种债券都有利息支付，而这正是差别所在.

4.1.2 Black-Scholes 货币模型

在外汇市场的模型中有三个资产和过程——两种货币的现金债券和汇率. 相仿简单的

Black-Scholes 模型，我们面对的外汇市场模型是：

Black-Scholes 通货模型

假设 B_t 是美元现金债券，D_t 是英镑现金债券，C_t 是1英镑的美元价格. 市场模型是

美元债券	$B_t = e^{rT}$,
英镑债券	$D_t = e^{uT}$,
汇　　率	$C_t = C_0\exp(\sigma W_t + \mu t)$,

[100] 其中 W_t 是$\mathbb{P}$-Brown 运动，r, u, σ, μ 是常数.

4.1.3 美元投资者

对于美元投资者来说，外汇市场上有两种可获得的交易资产. 其一并不复杂的便是美元债券，相当于 Black-Scholes 模型中的基准资产可直接交易，但另一个则复杂得多.

表面看来，随机过程 C_t，即汇率是一个可交易资产，但事实上并非如此. C_t 只是表示1英镑的美元价格，然而英镑现金并不是市场上可交易的资产. 如果允许持有现金资产，将会导致市场存在套利机会. 换句话说，由于英镑债券 D_t 的存在，根据套利致使英镑现金具有非零利率 u.

另一方面，D_t 本身也非一个美元可交易的对象，它只是一个可交易资产的价格，是用英镑表示的价格.

幸运的是，C_t 和 D_t 两者的乘积 $S_t = C_tD_t$ 是一个美元可交易资产. 美元投资者可持有英镑债券，它的美元价格就是其英镑价格 D_t 乘以汇率 C_t 转化而来.

这一转化产生了类似 Black-Scholes 模型的两个过程 B_t 和 S_t.

复制三步骤（外汇）

（1）寻找测度$\mathbb{Q}$ 使得英镑债券的美元贴现价格 $Z_t = B_t^{-1}S_t = B_t^{-1}C_tD_t$ 是一个鞅.

（2）形成过程 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$.

（3）寻找一个可料过程 ϕ_t 使得 $dE_t = \phi_t dZ_t$.

步骤1

英镑债券的美元贴现价格是

$$Z_t = C_0\exp(\sigma W_t + (\mu + u - r)t).$$

我们能否找到一个新的测度$\mathbb{Q}$ 使其成为一个鞅呢？根据 Cameron-Martin-Girsanov 定理可 [101] 知仅当 $\widetilde{W}_t = W_t + \sigma^{-1}(\mu + u - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t$ 是一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动时，那么在测度$\mathbb{Q}$ 之下，

$$Z_t = C_0\exp(\sigma\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t),$$

为一$\mathbb{Q}$-鞅. 进而

$$C_t = C_0\exp(\sigma\widetilde{W}_t + (r - u - \frac{1}{2}\sigma^2)t).$$

步骤 2

给定测度$\mathbb{Q}$，定义 E_t 为条件期望过程$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t)$，如前所示它是一个$\mathbb{Q}$-鞅.

步骤 3

由鞅表示定理可得$\mathcal{F}$-可料过程 ϕ_t，将 E_t 与 Z_t 相联系，使得

$$E_t = E_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}Z_s.$$

现在我们需要构造一个复制策略(ϕ_t,ψ_t)，它表明两种交易资产 S_t 和 B_t 的持有量，即

- 持有 ϕ_t 单位的英镑现金债券，同时
- 持有 $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ 单位的美元现金债券.

这一投资组合策略在 t 时刻的美元价值是 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t E_t$. 如果它的价值变化仅来自于资产价格的变化，那么它是自融资的，即 $\mathrm{d}V_t = \phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}B_t$，或如 3.7 节所示的那样，等价于 $\mathrm{d}E_t = \phi_t \mathrm{d}Z_t$，而这一等式正是由鞅表示定理得到的.

因为 $V_T = B_T E_T$，而 E_T 是未定权益 X 的贴现值 $B_T^{-1}X$，所以我们就得到了一个自融资的交易策略(ϕ_t,ψ_t)用以复制任意的一个未定权益 X.

期权定价公式（外汇）

任一未定权益都有套利价格. 该价格由复制它的投资组合策略的价值所确定，即

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t).$$

其中$\mathbb{Q}$是使得贴现资产价格过程 Z_t 为鞅的概率测度. 102

例 远期合约

英镑的远期合约. 我们现在该如何确定在未来的某个交易日 T 交易 1 英镑的价格呢? 如果现在商定按 1 英镑 k 美元的价格进行远期的交易，那么在交易日 T 的支付是

$$X = C_T - k.$$

在 t 时刻它的价值是 $V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_T - k\mid\mathcal{F}_t)$. 所以在 0 时刻确定的在 T 时刻购买英镑的远期交易价格应是 $k = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_T)$，或者是

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(C_0\exp(\sigma\widetilde{W}_T + (r - u - \frac{1}{2}\sigma^2)T)\right) = e^{(r-u)T}C_0.$$

即由英镑的当前价格乘上一个由两种货币的利率差确定的贴现因子而得到. 按此交易价格，远期合约在 t 时刻的价值是

$$V_t = e^{-uT}(e^{ut}C_t - e^{rt}C_0).$$

其贴现组合价值就是 $E_t = B_t^{-1}V_t = e^{-uT}Z_t - e^{-uT}C_0$，因此，$\mathrm{d}E_t = e^{-uT}\mathrm{d}Z_t$，所需的套期保值策略 ϕ_t 是一常数 e^{-uT}，ψ_t 则为常数 $-e^{-uT}C_0$.

这证实了我们在前面对远期合约的直观判断.

例　看涨期权

考虑一份英镑看涨期权. 假设拥有一份合约，允许我们有权选择是否在未来的某个交易日 T 按照 1 英镑 k 美元的价格购买 1 英镑. 那么在 T 时刻的美元支付是

$$X = (C_T - k)^+.$$

这一支付在 t 时刻的价值是 $V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t)$. 因为 C_T 是对数正态分布的随机变量，利用下面的一个已知的概率结果，容易计算该价格.

对数正态的看涨期权公式

如果 Z 是服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，$F, \bar{\sigma}, k$ 是常数，那么

$$\mathbb{E}\left((F\exp(\bar{\sigma}Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2) - k)^+\right) = F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} + \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}}\right).$$

103

因为远期交易价格 $F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_T)$，而 C_T 的值可以写成 $F\exp(\bar{\sigma}Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2)$ 的形式，其中 $\bar{\sigma}^2$ 是 $\log C_T$ 的方差，即是 $\sigma^2 T$，Z 在测度 $\mathbb{Q}$ 下服从标准正态分布 $N(0,1)$.

那么在 0 时刻期权的价格就是 $\mathbb{E}((F\exp(\bar{\sigma}Z - \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2) - k)^+)$，因此由对数正态期权定价公式可知

$$V_0 = e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

相应的套期保值策略是

$$\phi_t = e^{-uT}\Phi\left(\frac{\log\frac{F_t}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$\psi_t = -ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{F_t}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

其中，F_t 是 t 时刻的远期英镑价格，即 $F_t = e^{(r-u)(T-t)} C_t$.

4.1.4　英镑投资者

对英镑投资者来说，情况就有些不同了. 此时市场交易是以英镑为中心运转的. 我们不能用美元来表示资产价格过程，而是用英镑去表示. 首先，英镑债券 $D_t = e^{ut}$ 是基本的计账单位. 其次我们要采用一个反向的汇率过程 C_t^{-1}，代表 1 美元的英镑价格，它可以写成

$$C_t^{-1} = C_0^{-1}\exp(-\sigma W_t - \mu t),$$

但它不是一个可交易资产的英镑价格，就像 C_t 对于美元投资者一样. 所以实际上另一个英镑可交易资产的价格过程是美元债券的英镑价格 $C_t^{-1}B_t$.

有了这两个英镑可交易资产价格过程，D_t 与 $C_t^{-1}B_t$，我们就可重复复制策略三步骤. 美元债券的英镑贴现价格过程是

$$Y_t = D_t^{-1}C_t^{-1}B_t = C_0^{-1}\exp(-\sigma W_t - (\mu + u - r)t).$$

这一贴现价格过程 Y_t 在新测度 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 下是一个鞅，如果

$$\widetilde{W}_t^{\pounds} = W_t + \sigma^{-1}(\mu + u - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t,$$

104

是一个 $\mathbb{Q}^{\pounds}$-Brown 运动. 套期保值策略和前面一样也是可以操作的.

期权价格公式（英镑投资者）

对英镑投资者来说，在交易日 T 时的支付 X 英镑的价格是

$$U_t = D_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\pounds}}(D_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

其中 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 是使英镑贴现资产过程 Y_t 为鞅的测度.

4.1.5 计价单位的转换

一个令人担心的可能性——测度 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 是不同的. 面对同一证券，美元投资者和英镑投资者会有不同的价格吗？

假设 X 是在交易日 T 时支付的美元权益，对美元投资者来说，在 t 时刻它的价格是

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)(\text{美元}).$$

而对英镑投资者来说，这一权益支付是 $C_T^{-1}X$ 英镑，而不是 X 美元. 它在 t 时刻的英镑价格是

$$U_t = D_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}^{\pounds}(D_T^{-1}(C_T^{-1}X) \mid \mathcal{F}_t)(\text{英镑}).$$

这两个价格是一样的吗？即英镑表示的价格转化为美元价格 C_tU_t，它会和原来的美元价格 V_t 相同吗？

因为 $\mathbb{Q}^{\pounds}$-Brown 运动 $\widetilde{W}_t^{\pounds} = \widetilde{W}_t - \sigma t$，所以由 Cameron-Martin-Girsanov 定理之逆可知，测度 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 关于测度 $\mathbb{Q}$ 的 Radon-Nikodym 导数（到时刻 T）必须是

$$\frac{d\mathbb{Q}^{\pounds}}{d\mathbb{Q}} = \exp(\sigma\widetilde{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T).$$

伴随 Radon-Nikodym 导数的 $\mathbb{Q}$-鞅由条件期望生成，即

105

$$\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^{\pounds}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}}\Big|\mathcal{F}_t\right) = \exp(\sigma\widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t).$$

注意到，ζ_t 是英镑债券的美元贴现价格过程（只相差一个常数因子），具体地说就是，$C_0\zeta_t = Z_t = B_t^{-1}C_tD_t$. 再由 3.4 节中的 Radon-Nikodym 注记（ii）可知，对任一到交易日 T 时能知其值的随机变量 X 有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\pounds}}(X\mid\mathcal{F}_t) = \zeta_t^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_T X\mid\mathcal{F}_t).$$

因此英镑投资者认可的美元价格是

$$C_tU_t = C_tD_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\pounds}}(D_T^{-1}C_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t) = C_tD_t\zeta_t^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_T D_T^{-1}C_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t),$$

代入 ζ_t 的表达式即可得到

$$C_tU_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X\mid\mathcal{F}_t) = V_t.$$

所以，交易日 T 时的 X 美元的支付，无论对哪一个投资者来说，它的价格在任何时刻都是相同的. 通过类似的转化计算还可知道两种投资者的复制策略也是相同的. 因此他们既认可相同的价格，同时也采取相同的复制策略.

鞅测度的不同，实际反映的只是两种投资者采用的计价单位的不同，而非是价格上的基本的不一致. 关于变化计价单位所带来的影响我们将在 6.4 节中进一步详细地讨论.

对所有的投资者来说，无论他们采用何种货币作为计账单位，任一衍生权益和其他证券的价格都是一致的.

4.2　股权与红利

所谓股权即是定期向持有者支付现金回报的股票. 在此之前的模型中，是将股票作为一个纯粹的资产来对待的. 对这一模型加以修正之后可以处理红利支付情形.

106

最简单地，不妨从连续支付红利的情形开始.

连续红利的股权模型

设股票价格过程 S_t 服从 Black-Scholes 模型，$S_t = S_0\exp(\sigma W_t + \mu t)$，同时设 B_t 是常利率现金债券，$B_t = \exp(rt)$，始于时刻 t 长度为 $\mathrm{d}t$ 的一段时间内支付的红利是

$$\delta S_t\mathrm{d}t,$$

其中 δ 是一个比例常数.

正如外汇一样，我们面临的问题是股票价格过程 S_t 不是一个可交易资产. 如果我们在 0 时刻用 S_0 的价格购买一份股票，到时刻 t 时售出，那么所得到的财富价值不仅是股票价格 S_t 本身，还有在这段时间内持有股票所得到的红利的总和. 从模型中知道红利支付依赖

于从0时刻到t时刻的股票价格. 股票价格S_t不再是资产价值的全部，而只是其中的一部分.

同样如外汇情形，我们须将S_t转化，寻找一个新的过程，使之包含了S_t且是一个可交易资产. 考虑下面的简单的资产组合策略. 在0时刻持有一单位股票，随后每当有红利支付时，就立即将红利收入用于投资购买一些股票，也即是利用红利连续地调整持有的股票的份额. 每个小时间段里每份股票支付的红利是$\delta S_t \mathrm{d}t$，那么就可以再购入$\delta \mathrm{d}t$份股票. 因此到t时刻时资产组合持有的股票的数量将是$\exp(\delta t)$，这个资产组合的价值是

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu + \delta) t).$$

注意模型假设是怎样促成上述这一转化的. 我们假定了红利支付与股票价格之比是一个常数，从而很自然地通过股息的再投资于股票就构造了一个可交易资产. 如果假定事先已经知道红利支付这一现金流，且不依赖于股票价格，那么我们就可将这些红利支付重新投资于现金债券中（参见4.3节关于债券讨论的个例）. 模型的假设决定了可交易资产的构造. [107]

4.2.1 复制策略——股票

一个投资股票和债券的组合(ϕ_t, ψ_t)可以重新写成一个再投资于股票和债券的组合$(\tilde{\phi}_t, \psi_t)$，其中$\tilde{\phi}_t = e^{-\delta t}\phi_t$. 它的价值是$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = \tilde{\phi}_t \tilde{S}_t + \psi_t B_t$，这一新框架的好处在于自融资方程保留了熟知的形式

$$\mathrm{d}V_t = \tilde{\phi}_t \mathrm{d}\tilde{S}_t + \psi_t \mathrm{d}B_t.$$

同时，若用普通的股票和债券记号而言，这一方程应该根据红利支付现金流修正为$\mathrm{d}V_t = \phi_t \mathrm{d}S_t + \psi_t \mathrm{d}B_t + \phi_t \delta S_t \mathrm{d}t$，也即，投资组合价值的变化既源于投资股票、债券的损益（方程中的$\mathrm{d}S_t, \mathrm{d}B_t$两项），同时也来自股息收入.

有了再投资的股票，我们就可跟往常一样将其贴现资产$\tilde{Z}_t = B_t^{-1}\tilde{S}_t$转化为一个鞅. 因为现在$\tilde{Z}_t$满足下述的随机微分方程（SDE）:

$$\mathrm{d}\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t\left(\sigma \mathrm{d}W_t + \left(\mu + \delta + \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)\mathrm{d}t\right),$$

所以我们须构造一个新的测度$\mathbb{Q}$使得$\tilde{W}_t = W_t + \sigma^{-1}\left(\mu + \delta + \frac{1}{2}\sigma^2 - r\right)t$是一个Brown运动.
在此鞅测度$\mathbb{Q}$之下，$\mathrm{d}\tilde{Z}_t = \sigma \tilde{Z}_t \mathrm{d}\tilde{W}_t$. 要构造一个交易策略去对冲一个交易日$T$时的权益$X$，我们又可以仿造简单Black-Scholes模型，应用鞅表示定理，也即，存在一个可料过程$\tilde{\phi}_t$使得:

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X) + \int_0^t \tilde{\phi}_s \mathrm{d}\tilde{Z}_s.$$

这一交易策略是持有$\tilde{\phi}_t$单位的转换资产$\tilde{S}_t$和$\psi_t = E_t - \tilde{\phi}_t \tilde{Z}_t$单位的现金债券. 用原来的资产来表示，这等价于持有$\phi_t = e^{\delta t}\tilde{\phi}_t$单位的股票$S_t$和$\psi_t$单位的债券$B_t$.

因此，在鞅测度之下

$$S_t = S_0 \exp\left(\sigma \widetilde{W}_t + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right),$$

108 是服从对数正态分布的.

例 远期合约

一份远期合约规定在交易日 T 时按价格 k 购买一份股票，它的支付是

$$X = S_T - k.$$

在 t 时刻，这一支付的价值是

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-r(T-t)}(S_T - k) \mid \mathcal{F}_t\right) = e^{-\delta(T-t)} S_t - e^{-r(T-t)} k.$$

使远期合约在0时刻价值为0的交易价格 k 应该为 S_T 的远期价格

$$F = e^{(r-\delta)T} S_0.$$

套期保值策略是在 t 时刻持有 $\phi_t = e^{-\delta(T-t)}$ 单位的股票和 $\psi_t = -ke^{-rT}$ 单位的债券. 注意这一使人略感惊奇的复制远期合约的动态交易策略. 与简单地持有一定数量的股票直到交易日 T 不同的是，我们现在是连续地用红利收入购买更多的股票. 为什么？又是因为模型的假定——如果红利支付与股票价格 S_t 保持一个固定的比例，那别无选择只能将这些股息收入重新归到股票之上.

例 看涨期权

一份敲定价格为 k 的在时刻 T 执行的看涨期权的到期支付是 $X = (S_T - k)^+$，它在0时刻的价值是 $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}(S_T - k)^+)$，也即是

$$V_0 = e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

其中 F 是远期交易价格 $e^{(r-\delta)T}S_0$. 套期保值策略是持有 $e^{-\delta(T-t)}\Phi(+)$ 单位的股票和卖空 $ke^{-rT}\Phi(-)$ 单位的债券（这里 $\Phi(+)$, $\Phi(-)$ 分别表示上述公式中的两个 Φ 项).

可见 Black - Scholes 看涨期权公式又一次灵验了. 如果在测度 $\mathbb{Q}$ 下，我们讨论的过程 S_t 是对数正态分布的，那么4.1节的定价公式还是行之有效的. 只要已知远期交易价格 F 和期限波动率 σ 就可以确定看涨期权的价格. 109

例 有保证的股权收入

一份合约根据英国的 FTSE 股票指数 S_t 来支付报酬，并附带有保证的最小支付额与最大支付额. 准确地说，它是一份5年期的合约，规定支付 FTSE 股票指数的终期值与其初始值之比的90%，如果它比130%小的话就直接支付130%；但是如果它超过180%的话，那么就只支付180%. 这样的一份合约价值多少呢？

已知数据：

FTSE 指数的漂移系数 $\mu = 7\%$

FTSE 指数的波动率 $\sigma = 15\%$

FTSE 指数的红利支付比例 $\delta = 4\%$

利息率 $r = 6.5\%$

因为 FTSE 股票指数包含有 100 种不同的股票，这些股票各自的红利支付近似于一个连续的现金流. 这个未定权益 X 是

$$X = \min\{\max\{1.3, 0.9S_T\}, 1.8\}.$$

其中 $T=5$，FTSE 指数的初始值 $S_0 = 1$. 这一权益可以重写为

$$X = 1.3 + 0.9\{(S_T - 1.444)^+ - (S_T - 2)^+\}.$$

也即，X 实际上是两份不同的看涨期权的差（加上一些现金）. S_T 的远期交易价格是

$$F = e^{(r-\delta)T}S_0 = 1.133.$$

利用上述红利支付情形下的期权定价公式分别计算两份看涨期权的（单位）价格，前者是 0.0422，后者是 0.0067. 那么 0 时刻 X 的价格就是

$$V_0 = 1.3e^{-rT} + 0.9(0.0422 - 0.0067) = 0.9712.$$

实际上，我们并没有理会 FTSE 指数所包含的支付红利的那些股票. 但是红利支付并不反映在这个指数之中，为此我们就会不正确地对此合约估价为 1.0183，大约有 5% 的高估. 110

4.2.2 周期性红利

在实践中，一只股票只是在一些定期的时段上支付红利，而非连续地支付. 但这并不会对我们的模型造成什么实质的麻烦. 不妨假设事先已经知道在 $T_1, T_2, \ldots$ 等时刻上支付红利，并且在每一个 T_i 时刻，股权持有者可得到的股息是股票现价的 δ 倍. 在支付红利的瞬间，股票价格也必定下跌相等数额，否则将产生套利机会. 那么在任意时刻 $T = T_i$，我们可以假定红利支付恰好等于股票价格的下跌额.

周期性红利股权模型

在一些确定的时间 $T_1, T_2, \ldots$ 等等，股权支付的红利是红利支付前的股票的瞬时价格的 δ 倍. 股票价格过程的数学模型是

$$S_t = S_0(1-\delta)^{n[t]}\exp(\sigma W_t + \mu t),$$

其中 $n[t] = \max\{i : T_i \leq t\}$，是到 t 时刻为止支付红利的实际次数. 此外，另有一现金债券 $B_t = \exp(rt)$.

我们面临着两个问题. 第一个是熟知的，S_t 不是一个可交易资产的价格过程. 因而必须将其转化为可交易资产. 第二个则更困难一些. 在每个 T_i 时刻之后，S_t 都满足随机微分方程（SDE）：$dS_t = S_t(\sigma dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)dt)$，而在那些时刻，股票价格过程都有一个间断

的跳跃. 因此 S_t 是不连续的，这与我们定义的随机过程不一致. 幸运的是，转化后的可交易资产的价格过程将会弥补这一缺陷.

考虑下面的交易策略. 开始时持有一单位的股票，随后每一次支付红利时，立即将红利收入重新投资于股票. 在 t 时刻我们将拥有 $(1-\delta)^{-n[t]}$ 单位的股票，因此这一资产组合的价值是 $\tilde{S}_t$，其中

$$\tilde{S}_t = (1-\delta)^{-n[t]} S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t).$$

与之前类似，$\tilde{S}_t$ 是一个可交易资产. 无套利假设使得红利支付额恰好等于股票价格的跃度，从而使得 $\tilde{S}_t$ 是连续的. 我们又回到所熟悉的情形之中.

111

4.2.3 复制策略

我们将采取的交易策略是$(\tilde{\phi}_t, \psi_t)$，其中 $\tilde{\phi}_t$ 是在时刻 t 时持有的转化资产 $\tilde{S}_t$ 的数量，ψ_t 则表示持有现金债券 B_t 的数量. 这一策略等价于持有 $\phi_t = (1-\delta)^{-n[t]}\tilde{\phi}_t$ 单位的实际股票 S_t.

这一策略的贴现价值过程是 $E_t = \tilde{\phi}_t \tilde{Z}_t + \psi_t$，其中 $\tilde{Z}_t$ 是再投资股票的贴现价值过程，即 $\tilde{Z}_t = B_t^{-1}\tilde{S}_t$. 若 $dE_t = \tilde{\phi}_t d\tilde{Z}_t$，那么资产组合是自融资的.

与之前类似，我们要找一个测度$\mathbb{Q}$ 使 $\tilde{Z}_t$ 在此测度下是一个鞅过程. 因为 $d\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t(\sigma dW_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)dt)$，如果 $\tilde{W}_t = W_t + \sigma^{-1}(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r)t$ 是一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动，那么漂移项将消失，从而 $\tilde{Z}_t$ 是一个$\mathbb{Q}$-鞅.

可以构造过程 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$，其中 X 是需要对冲的基于股票的期权.

最后根据鞅表示定理得到一个套期保值策略 $\tilde{\phi}_t$，相应地，$\psi_t = E_t - \tilde{\phi}_t\tilde{Z}_t$. 因此在这种情形之下套期保值依然可行. 未定权益 X 在 0 时刻的价值是$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$.

在测度$\mathbb{Q}$ 之下，股票价格过程是

$$S_t = S_0(1-\delta)^{n[t]} e^{\sigma\tilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

因为它是对数正态分布的，对 S_T 远期交易价格为 $F = S_0\ (1-\delta)^{n[T]}e^{rT}$，那么一份敲定价格为 k 的看涨期权的 Black-Scholes 价格公式是

$$V_0 = e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

4.3 债　　券

一个纯粹的贴现债券是在未来的到期时间 T 时支付一单位货币的一种证券. 要是利率

恒为常数 r，那么在时刻 t 时贴现债券的价值是 $e^{-r(T-t)}$. 为更符合市场的实际情况，我们必须考虑利率是随机时的影响. 由于利率的随机变动，它们未来价值的不确定性将导致贴现债券的价格也随机地变化.

112

关于贴现债券或附息票债券（coupon bond）的完整的数学模型，将等到在第 5 章中讨论期限结构模型（term structure model）时加以研究. 在一个简单的 Black-Scholes 模型中，我们无须过于担心不同到期时间的利率的交互作用和建模时必须小心应对的套利问题. 因而不要对利率太敏感、太复杂化. 债券价格随机地变动，但是短期利率将是确定的. 在实际市场中，它们是相互联系的，同时，股票价格或外汇价格也和现金债券价格是相互联系的. 在短期内，大多数投资者都会忽视存在于这三个市场之间的联系.

4.3.1 贴现债券

关于贴现债券的 Black-Scholes 模型是：

贴现债券模型

假定现金债券 $B_t = \exp(rt)$，r 是一个正的常数. 一个贴现债券的价格过程服从

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t),$$

对 $t < T$ 成立，T 是时间跨度，比债券到期时间 τ 要小许多.

从公式上看，它与简单的关于股票的 Black-Scholes 模型并无区别. 因此在时间 $T < \tau$ 时购买债券的远期交易价格是

$$F = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T),$$

其中 $\mathbb{Q}$ 是使 $e^{-rt}S_t$ 为鞅过程的测度. 因为 $\sigma^2 T$ 是 $\log S_T$ 在测度 $\mathbb{Q}$ 之下的方差（σ 是期限波动率），那么一份对于 S_T 敲定价格为 k 的看涨期权的价格是

$$e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

虽然，必须小心，我们假定时间跨度 T 比债券到期的时间 τ 要小许多. 当时间 T 越来越逼近 τ 时，确定性债券与随机变化的贴现债券的差别越来越不明显，而且基于同样的理由识别模型中的漂移系数 μ 与波动率 σ 越来越困难. 一份贴现债券在到期时间 τ 时支付一单位货币，因此在 τ 时的价格必定是 $S_\tau = 1$. 一个好的数学模型，它的漂移系数和波动率必须保证这个归一的性质. 在第 5 章中确实是这样的. 在这里如果令 $T = \tau$，那么我们不能保证这一性质.

113

4.3.2 附息票债券

多数的市场债券都不仅是在到期时支付一个单位的货币，而且在到期之前的一个时间

列 $T_1, T_2, ..., T_n$ 都有（少量的）c 单位货币的息票支付，这样的息票支付类似股票红利.但与股票模型不同的是，这些息票是事先已经知道的. 对于时间 T 前后的息票，我们将简化处理，而不过于复杂化. 最简单的模型是将时间 T 之前的息票看作是确定的现金债券，而将时间 T 之后的息票（包括最后时间的支付）看作是一个随机价格过程.

附息债券模型

设有一个简单的现金债券 $B_t = \exp(rt)$ 和一个附息债券，它在到期时间 τ 之前的一个时间列 $T_1, T_2, ..., T_n$ 上分别支付少量的 c 单位的货币. 记 $I(t) = \min\{i : t < T_i\}$ 表示时间 t 之后的第一个支付的序列数，令 $j = I(T) - 1$ 表示时间 T 之前息票支付的次数，那么附息债券在时间 t 时的价格是

$$S_t = \sum_{i=I(t)}^{j} ce^{-r(T_i - t)} + A\exp(\sigma W_t + \mu t), \quad t < T.$$

具体地说，我们是将第一类息票（例如在 $T_i < T$ 之前的支付）在时间 t 的价值看作是

$$ce^{-r(T_i - t)}, \quad t < T_i.$$

114 而对第二类息票（即时间 T 之后的息票）的总和在时间 t 的价值看作是一个指数 Brown 运动

$$A\exp(\sigma W_t + \mu t), \text{对 } t < T,$$

其中 A, σ, μ 是常数.

在这里 S_t 对于息票支付的时刻又是不连续的，我们又可将其转换成可交易资产，就像在股票红利模型中所做的那样（参见 4.2 节). 然而，因为息票支付是事先已知的，这一次我们是持有一个单位的息票债券且将息票重新投资于现金债券中，从而构造一个价格过程连续的可交易资产. 它的价值是 $\tilde{S}_t$，其中

$$\tilde{S}_t = \sum_{i=1}^{j} ce^{-r(T_i - t)} + A\exp(\sigma W_t + \mu t).$$

显然这是一个连续的随机过程表示的可交易资产.

4.3.3 复制策略

记$(\tilde{\phi}_t, \psi_t)$为一资产组合，其中 $\tilde{\phi}_t$ 是在时刻 t 时持有的可交易资产 $\tilde{S}_t$ 的数量，ψ_t 则是直接持有的现金债券 $B_t = e^{rt}$的数量. 记 V_t 为这一组合的在时刻 t 时的价值，那么 $V_t = \tilde{\phi}_t \tilde{S}_t + \psi_t B_t$. 再记 E_t 为其贴现价值，那么 $E_t = \tilde{\phi}_t \tilde{Z}_t + \psi_t$，其中 $\tilde{Z}_t$ 是资产 $\tilde{S}_t$ 的贴现值. 如果 $dE_t = \tilde{\phi}_t d\tilde{Z}_t$，那么这一组合是自融资的.

跟往常一样，要通过测度变换使 $\tilde{Z}_t$ 成为一个鞅过程. 事实上，$\tilde{Z}_t$ 只是一个常现金总量 $\sum_{i=1}^{j} ce^{-rT_i}$ 加上一个指数 Brown 运动 $A\exp(\sigma W_t + (\mu - r)t)$. 因此如果 $\tilde{W}_t = W_t + \sigma^{-1}(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2$

$-r)t$ 是一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动，那么 $\tilde{Z}_t$ 就是一个$\mathbb{Q}$-鞅.

对于一个在时刻 T 可支付的期权 X，对于一些可料过程 $\tilde{\phi}_t$，价值过程 $E_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t)$可以表示成 $dE_t=\tilde{\phi}_t d\tilde{Z}_t$. 令 $\psi_t=E_t-\tilde{\phi}_t\tilde{Z}_t$. 那么$(\tilde{\phi}_t,\psi_t)$就是一个关于 X 的套期保值策略. X 在 0 时刻的价值就是$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$.

在测度$\mathbb{Q}$之下，债券在时刻 T 时的价格是

$$S_T=A\exp(\sigma\tilde{W}_T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T).$$

它是对数正态分布的. 因此，根据 4.1 节中的期权价格公式知道关于 S_T 的远期交易价格是 $F=Ae^{rT}$，一份关于 S_T 的敲定价格为 k 的看涨期权的价格是

$$e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

115

4.4 风险的市场价格

现在该把一些不同的目标问题连结在一起了. 到目前为止我们讨论的一些范例中有一个共同的样板模式在不断地重复着，那就是本章数学模型中的随机过程都是间接地反映交易资产的总量. 外汇交易过程须从一个不可交易的现金过程转化成一个可交易的贴现债券过程. 对于股权，必须将红利与其价格重组合在一起才转化为一个可交易资产；而对于债券，则需把息票重新投资于计价单位过程中. 所有这些问题的实质都是一个可交易资产与不可交易资产的区别问题. 只有当可用某种可交易资产去复制时，我们才能用鞅表示定理去复制一些未定权益. 但是对可交易资产与不可交易资产的区别，现在已达成共识. 我们能否做得更好呢?

在某种程度上说，这是可行的. 在本节中我们将有一些非常不错的方法去区别可交易资产与不可交易资产. 毕竟某些东西在市场上是否是可交易的不是一个数学决策问题. 但是如果选取一个特定的过程 S_t 去表示一个真实的可交易资产，同时选择一个恰当的贴现过程 B_t，那么我们就可以去探究由它们所刻画的市场.

4.4.1 鞅是可交易的

假设在某个测度$\mathbb{Q}$之下，可交易资产的贴现过程 $Z_t=B_t^{-1}S_t$ 是一个$\mathbb{Q}$-鞅. 对于一个关于同一个域流$\mathcal{F}_t$ 适应的可测过程 V_t，如果它的贴现过程 $E_t=B_t^{-1}V_t$ 是一个$\mathbb{Q}$-鞅的话，那么我们可以得到些什么呢?

首先，鞅表示定理告诉我们，只要 Z_t 有非零的波动率，就可以找到一个$\mathcal{F}$-可料过程 ϕ_t 使得

$$dE_t = \phi_t dZ_t.$$

如同先前的范例一样，我们就可以构造一个组合(ϕ_t, ψ_t)，即在时间t

- 持有ϕ_t单位的可交易资产S_t，
- 持有$\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$单位的可交易资产$B_t$.

[116] 同先前一样，可以证明(ϕ_t, ψ_t)是自融资策略，即它的价值的变化只是来自可交易资产的价格变化，而且这个组合在时刻t的价值正好就是V_t.

换句话说，就是可以由资产S_t和B_t得到过程V_t. 所以V_t是一个可交易资产应该是合理的. 因为它的贴现过程是一个$\mathbb{Q}$-鞅，这足以保证它能没有成本地由模型中的可交易资产组合生成——所以它本身也可能是可交易资产. 当然，所有从一些权益中构造而来的衍生证券都满足这样的性质——$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$是一个$\mathbb{Q}$-鞅.

4.4.2 非鞅是不可交易的

反之，情况又将如何呢？假定$B_t^{-1}V_t$不是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，那么从鞅的定义可知，在时间T与s以正概率使得$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}V_T \mid \mathcal{F}_s) \neq B_s^{-1}V_s$. 如果$V_t$确实是一个可交易资产，但是市场域流又导致$B_t^{-1}V_t$不是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，那么情况会怎么样呢？

现定义另一个过程U_t，设它是复制权益V_T的成本过程，即$U_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}V_T \mid \mathcal{F}_t)$. 那么这一过程的终值$U_T$就是$V_T$. 但是在时刻$s$时，$U_s$与$V_s$又可能是不同的. 因为$B_t^{-1}U_t$是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，且$U_t$可由资产$S_t$，$B_t$组合生成，从而可认为$U_t$是可交易的.

现在我们有两个可交易资产U_t和V_t，他们在时间T时是完全相同的，但是在时间s时，两者不等（是一正概率事件），那么就有一个套利机制. 如果说U_s比V_s大的话，我们就可以购买无限多的资产V，同时卖出无限多的资产U以便筹集资金. 资产组合$V-U$在时刻T时的价值是0，那么投资的资金就成了确定的利润. 如果U_s比V_s小的话，套利机制只须反向操作即可.

所以，如果V_t真的是一个可交易资产的话，那么由S_t，B_t和V_t三者形成的市场就存在套利机会——这是决不允许存在的事情. 为避免套利机制，如果$B_t^{-1}V_t$不是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程的话，那么V_t最好不用它作交易.

现在我们来定义一些具有相同性质的东西. 在一个完备的可交易证券市场中，有一个直接的办法去判断另一个过程是否是一个可交易的证券. 如果它的贴现价格过程在鞅测度$\mathbb{Q}$

[117] 之下是一个鞅的话，那么它就是可交易的；否则，它就是不可交易的.

> **可交易证券**
> 给定计价单位B_t和一个可交易资产S_t，一个过程V_t代表一个可交易资产当且仅当它的贴现价值过程$B_t^{-1}V_t$是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，其中$\mathbb{Q}$是使得贴现资产价格过程$B_t^{-1}S_t$是鞅过程的测度.

一方面看，这个过程只是B_t和S_t的线性组合. 另一方面看，在一个由一维 Brown 运动所定义的市场里，只有两个相互独立的可交易资产. 如果多于两个的话，就将产生套利机会.

习题

4.1 如果在测度$\mathbb{Q}$之下 S_t 是一个可交易的 Black-Scholes 股票价格过程，即有 $S_t=\exp(\sigma\widetilde{W}_t+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t)$，现金债券 $B_t=\exp(rt)$，证明

(i) $X_t=S_t^2$ 是不可交易的；

(ii) $X_t=S_t^{-\alpha}$，其中 $\alpha=2r/\sigma^2$，是可交易的.

4.4.3 可交易资产与风险的市场价格

在介绍风险的市场价格之前，最好先对 Black-Scholes 稍做些形式上的改动. 在原来的模型中，股票价格过程 $S_t=S_0\exp(\sigma W_t+\mu t)$，用随机微分方程表示就是

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\sigma\mathrm{d}W_t + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\mathrm{d}t).$$

我们发现用随机微分方程的形式定义股票价格过程，将显得更加方便一些，典型地，如果 S_t 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\sigma\mathrm{d}W_t + \mu\mathrm{d}t),$$

那么这一 SDE 的解过程是 $S_t=S_0\exp(\sigma W_t+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t)$. 这与原 Black-Scholes 模型中的股票价格过程相比只是漂移系数相差一个常数$\frac{1}{2}\sigma^2$，因此它可以看作仅是一个记号的变化而已. 两种形式都可以用来定义几何 Brown 运动. 但是 SDE 方式可以使一类更为广泛的模型变得更加容易处理.

现在假设有 2 个可交易风险证券 S_t^1 和 S_t^2，它们同在一个市场中，即都是同一 Brown 运动 W_t 的函数，并由下面的 SDE 所定义：

$$\mathrm{d}S_t^i = S_t^i(\sigma_i\mathrm{d}W_t + \mu_i\mathrm{d}t), \quad i = 1,2.$$

118

按照以前对可交易资产的讨论，要使 S_t^1 和 S_t^2 的贴现价格过程在同一测度$\mathbb{Q}$之下都是鞅过程. 所以，假定计价单位 $B_t=\exp(rt)$，那么无论 $i=1,2$，都有

$$\widetilde{W}_t = W_t + \left(\frac{\mu_i - r}{\sigma_i}\right)t$$

是一个$\mathbb{Q}$-Brown 运动. 然而，这只有在两个漂移项有相同的变化时才会发生，即

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}.$$

对一个常令人迷惑的巧合，经济学家常常对这一相等的量赋予经济上的含义——如果将 μ 看作是可交易资产的增长率（growth rate），r 是无风险债券的增长率，同时视 σ 为资产的风

险度量，那么

$$\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

就是单位风险（关于风险利率）的超额回报率．我们称它为风险的市场价格（market price of risk）.

利用风险的市场价格，我们可以简单地根据资产的随机微分方程来选出可交易资产．同一市场的所有的可交易资产都有相同的风险的市场价格.

4.4.4 一般的风险市场价格

现在可以考虑更一般的单因子模型．更严格的讨论将在6.1节中进行．但是现在可以看到一个一般的随机过程 S_t 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\sigma_t \mathrm{d}W_t + \mu_t \mathrm{d}t),$$

其中 σ_t 和 μ_t 都是可料过程．定义

$$\gamma_t = \frac{\mu_t - r}{\sigma_t},$$

它是一个依赖于时间和状态的风险的市场价格．除了这一形式上的变化，上面得到的规律仍然成立，即所有的可交易证券在每一个瞬时必须有相同的风险的市场价格.

119

4.4.5 风险中性测度

我们先回忆一下前面得到的结论，在一个由股票 S_t 和计价单位 B_t 定义的金融市场中，判断一个过程是否代表一个可交易资产，就看经 B_t 贴现之后，它和 S_t 是否有相同的鞅测度．从随机微分方程的角度看，就看它是否与 S_t 有相同的风险市场价格．该风险市场价格实际上就是Cameron-Martin-Girsanov定理中的Brown运动的漂移系数的变化．所以我们自然地可以从SDE中选出所有的可交易资产.

同时，我们将测度 $\mathbb{Q}$ 自然地解释为风险中性测度（risk-neutral measure）．如果将SDE按照 $\mathbb{Q}$-Brown运动 $\tilde{W}_t$ 表出

$$\mathrm{d}S_t = S_t(\sigma_t \mathrm{d}\tilde{W}_t + \tilde{\mu}_t \mathrm{d}t),$$

那么 S_t 是可交易资产的价格过程当且仅当它的风险市场价格是0．因此，所有的可交易资产在测度 $\mathbb{Q}$ 之下与现金债券有相同的增长率，与它们各自的风险 σ_t 无关，即测度 $\mathbb{Q}$ 是关于风险是中性的.

但是，我们不应当过分曲解它的经济上的意义，认为在我们的单因子模型中所有的可交易资产在每个瞬时都是完全相关的．它们拥有相同的风险市场价格不是因为某些深奥的经济原因或投资者表现为一致的风险偏好，而是因为如果不这样的话将会有非鞅过程，从而产生套利机会．风险市场价格只是一个从测度 $\mathbb{P}$ 变化为 $\mathbb{Q}$ 方便的代数形式，并没有别的新用处.

4.4.6 不可交易量

但它是方便的. 现在回到我们的议题——讨论不可交易的过程. 在外汇、股权和债券三种情形下，存在一个过程，它与可交易资产有固定的函数关系，但它本身并不是可交易的. 具体地说，可能有一个不可交易量 X_t，服从下面的随机微分方程

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$

其中 σ_t 和 μ_t 是可料过程，W_t 是$\mathbb{P}$-Brown 运动，这里的 σ_t 和 μ_t 可能是常数也可能是一个常数与 X_t 的乘积，但它们也不一定是这些情形.

已知 X_t 是不可交易的量，但是 X_t 的一个确定性的函数 $Y_t = f(X_t)$ 是可交易的，那么根据 Itô 公式，Y_t 满足如下的 SDE

$$dY_t = \sigma_t f'(X_t) dW_t + (\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t)) dt.$$

120

因为 Y_t 是可交易的，可立即写出它的风险的市场价格. 为此假设贴现率是常数 r，那么

$$\gamma_t = \frac{\mu_t f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t) - rf(X_t)}{\sigma_t f'(X_t)}.$$

因为这一风险反映了测度从$\mathbb{P}$到$\mathbb{Q}$的变化，为此得到 X_t 在新测度$\mathbb{Q}$下满足的 SDE

$$dX_t = \sigma_t d\widetilde{W}_t + \frac{rf(X_t) - \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t)}{f'(X_t)} dt.$$

因此，对于基于 X_t 的权益，我们就可以利用 X_t 在风险中性测度下的 SDE 通过通常的期望途径对它们进行定价.

例 (i) 如果 X_t 是一个可交易资产的对数，那么 f 就是指数函数 $f(x) = e^x$. 在 $\sigma_t = \sigma$，$\mu_t = \mu$ 是常数（即是基本的 Black-Scholes 模型）简单的情形下，那么可交易资产的风险的市场价格是

$$\gamma_t = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2 - r}{\sigma},$$

X_t 在相应的风险中性测度下的 SDE 是

$$dX_t = \sigma d\widetilde{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) dt.$$

依赖时间的变换

更一般地，假设利率是一个随机过程 r_t，X_t 是不可交易的，满足下面的随机微分方程

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$

Y 是一个可交易证券，它是 X 和时间的确定性函数，亦即，$Y_t=f(X_t,t)$，那么在鞅测度$\mathbb{Q}$之下的 SDE 是

$$dX_t = \sigma_t d\widetilde{W}_t + \frac{r_t f(X_t,t) - \frac{1}{2}\sigma_t^2 f''(X_t,t) - \partial_t f(X_t,t)}{f'(X_t,t)} dt,$$

[121] 其中f'和f''分别是f关于 x 的一阶和二阶偏导数，$\partial_t f$ 是f关于时间 t 的偏导数.

（ii）设股票价格过程是 S_t，红利支付比率是 δS_t. 令 X_t 即为过程 S_t，并假设它服从 Black-Scholes 模型，即

$$dX_t = X_t(\sigma dW_t + \mu dt).$$

资产 $Y_t=\exp(\delta t)X_t$，是将红利重新投资于股票得到的可交易资产．因此，函数f是$f(x,t)=xe^{\delta t}$. 可交易资产的风险市场价格是

$$\gamma_t = \frac{\mu X_t e^{\delta t} + \delta X_t e^{\delta t} - rX_t e^{\delta t}}{\sigma X_t e^{\delta t}} = \frac{\mu + \delta - r}{\sigma},$$

同时，X_t 在风险中性测度下的 SDE 是

$$dX_t = X_t(\sigma d\widetilde{W}_t + (r-\delta)dt).$$

（iii）外汇，"绕过错误的处理方法"．令 C_t 是美元与德国马克的汇率（表示 1 美元的马克价格），那么如果用美元来支付的话，C_t 就不是可交易的（例如，若 $C_t=1.45$ 马克，那么 1.45 美元就不是可交易的）．然而，过程 $1/C_t$ 是可交易的，或更严格地，如果德国货币的利率是常数 u 的话，e^{ut}/C_t 是美元可交易资产．如果 $X_t=C_t$ 满足下面的 SDE：

$$dX_t = X_t(\sigma_t dW_t + \mu_t dt),$$

那么在依赖时间的函数变换$f(x,t)=e^{ut}/x$之下，X_t 在风险中性测度下的 SDE 是

$$dX_t = X_t(\sigma_t d\widetilde{W}_t + (\sigma_t^2 + \mu - r)dt).$$

4.5　双重货币工具

英国石油公司（British Petroleum，简记 BP）的股票是以英镑进行交易的．如果忽略英镑作为货币计价单位，只是将股票价格视作一个单纯的数量的话，这一数量就可以用任何 [122] 一种货币作为计价单位．像这种保持原来的数量不变，而采用"错误"的货币作为计价单位进行等量的支付的合约，就叫做双重货币工具（quantos）．例如，如果现在股票价格是 5.20 英镑，我们可设计一份衍生证券将此价格量转化为等量的美元支付，即 5.20 美元．显然这并不等于 BP 股票的美元价格，后者依赖于汇率．我们所做的事情只是一个形式上的单位转换，而原来的数量则保持不变.

最好用一些例子来描绘双重货币工具，以下有三个.

- 一份远期合约，规定在时间 T 时按照一个事先商定的美元价格购买用美元计价的 BP 股票.
- 一份数字合约，规定在 T 时刻当 BP 股票价格超过一个预先约定的水平时支付 1 美元.
- 一份期权，规定持有者收到在数量上与 BP 股票价格减去敲定价等量的美元.

在这些例子中，衍生证券都是以另一种货币进行错位转换支付，而不是以原证券认定的货币去支付的. 直觉告诉我们，这种货币错位转换支付，并不是避开汇率，而是具有更基本的意义. BP 股票用美元支付是一个有意义的概念，但它并不是一个可交易的资产. 这种支付是一些不可交易的量.

假设有一个简单的两因子模型. 实际上，我们至今并没有遇到过多因子模型，但相比单因子模型它们并不会产生什么实质性的问题. 详细的讨论将在 6.3 节中进行. 现在我们模型中有两个过程，一个是股票价格，另一个是汇率，它们由两个相互独立的 Brown 运动 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 所驱动.

为构造起见，回忆习题 3.2，如果常数 ρ 取值于 -1 和 1 之间，那么 $\rho W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}W_2(t)$ 也是一个 Brown 运动，它与原来的 Brown 运动 $W_1(t)$ 的相关系数是 ρ. 这是一个很有用的方法，从两个相互独立的 Brown 运动中构造两个相关的 Brown 运动.

现假设，漂移系数 μ, v 是常数，波动率 σ_1,σ_2 是正常数，相关系数 $-1<\rho<1$. 有了这些常数，双重货币工具模型是 [123]

双重货币工具模型

以英镑进行交易的股票价格 S_t 和 1 英镑的美元价值 C_t 分别满足过程

$$S_t=S_0\exp\ (\sigma_1 W_1(t)+\mu t),$$

$$C_t=C_0\exp\ (\rho\sigma_2 W_1(t)+\bar{\rho}\sigma_2 W_2(t)+vt).$$

其中，$\bar{\rho}$ 是 ρ 的正交补，$\bar{\rho}=\sqrt{1-\rho^2}$. 此外，有一个美元现金债券 $B_t=\exp(rt)$ 和一个英镑现金债券 $D_t=\exp(ut)$，其中利率 r，u 是常数.

在找出美元可交易资产之前，先看看 S_t 和 C_t 的方差. 如果用向量形式表示我们的模型，那么随机向量$(\log S_t,\log C_t)$是联合正态分布的，其中均值向量是$(\log S_0+\mu t,\log C_0+vt)$，协方差矩阵是

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}t.$$

也即，S_t 的波动率是常数 σ_1，C_t 的波动率是常数 σ_2，ρ 是它们的相关系数.

4.5.1 可交易资产

从模型来看，美元可交易的资产是什么呢？直观地，从 4.1 节对外汇的讨论可知，有

三个美元可交易资产：英镑债券的美元价格过程 C_tD_t；股票的美元价格 C_tS_t；还有一个就是计价单位，即美元现金债券 B_t.

经第三个计价单位贴现之后，我们得到前两个可交易的贴现价格过程 $Y_t = B_t^{-1}C_tD_t$，和 $Z_t = B_t^{-1}C_tS_t$. 它们分别满足下面的随机微分方程

$$dY_t = Y_t(\rho\sigma_2 dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) + (v + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r)dt),$$

$$dZ_t = Z_t((\sigma_1 + \rho\sigma_2)dW_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2 dW_2(t) + (\mu + v + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r)dt).$$

124 （这两个 SDE 可以利用6.3节的多因子的 Itô 公式得到.）

正如上节对风险市场价格的讨论一样，我们需变换测度使这两个过程为鞅过程，或者等价地写出反映漂移系数变化的风险市场价格. 因为现在有两个风险源 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$，因此应该也有两个风险市场价格. 分别来看，即风险市场价格 $\gamma_1(t)$ 对应风险源 $W_1(t)$，风险市场价格 $r_2(t)$ 对应风险源 $W_2(t)$. 或者说，我们有一个风险市场价格向量 $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. 我们要选择这样的一个向量 γ 使得 dY_t 和 dZ_t 的漂移项同时消失. 毫不奇怪，这意味着要同时处理两个方程，或等价地对下面的矩阵求逆：

$$\begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2\\ \sigma_1 + \rho\sigma_2 & \bar{\rho}\sigma_2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r\\ \mu + v + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2 - r\end{pmatrix}.$$

以上只是更一般情形下的一个特例，一般情形下的高维风险市场价格公式是

$$\gamma_t = \Sigma^{-1}(\mu - r\mathbf{1}),$$

其中，Σ 是资产的波动率矩阵，μ 是资产的漂移系数向量，$\mathbf{1}$ 理解为常向量 $(1,\cdots,1)$. 详细的讨论参见6.3节.

在这里，风险市场价格向量 $\gamma_1 = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$，其中

$$\gamma_1 = \frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2 - u}{\sigma_1}, \quad \text{同时,} \quad \gamma_2 = \frac{v + \frac{1}{2}\sigma_2^2 + u - r - \rho\sigma_2\gamma_1}{\bar{\rho}\sigma_2}.$$

因此在测度 $\mathbb{Q}$ 之下，S_t 和 C_t 分别为：

$$S_t = S_0\exp(\sigma_1\widetilde{W}_1(t) + (u - \rho\sigma_1\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t),$$

$$C_t = C_0\exp(\rho\sigma_2\widetilde{W}_1(t) + \bar{\rho}\sigma_2\widetilde{W}_2(t) + (r - u - \frac{1}{2}\sigma_2^2)t).$$

习题

4.2 证明在使得 $\widetilde{W}_i(t) = W_i(t) + \int_0^t \gamma_i(s)\mathrm{d}s$, $i=1,2$ 为 Brown 运动的测度$\mathbb{Q}$是 Y_t 和 Z_t 的鞅测度.

显然，$\rho\widetilde{W}_1(t)+\bar{\rho}\widetilde{W}_2(t)$ 也是一$\mathbb{Q}$-Brown 运动（在习题 3.2 中证明了），因此这里的汇率过程和 4.1 节中的一致.

125

但是股票价格过程 S_t 和我们的期望有所不同，在漂移项中多出 $-\rho\sigma_1\sigma_2$ 这一项. 对于 ρ 的每一个取值（除了$(\mu-r)/\sigma_1\sigma_2$ 之外），经美元债券贴现的股票价格过程都不是一个$\mathbb{Q}$-鞅过程，因此用美元支付的价格是不可交易的，这和我们的直觉是相吻合的. 没有任何一个组合策略，它的美元价值会在数量上和 BP 股票的价格相同.

4.5.2 定价

因为有了鞅测度$\mathbb{Q}$，使美元可交易资产都是鞅过程，因此我们可以对双重货币合约进行定价.

4.5.3 远期合约

为对一份远期合约定价，先写出股票价格过程在时间 T 时的数值，

$$S_T = \exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T)F\exp(\sigma_1\sqrt{T}Z - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T),$$

其中 F 是 S_T 远期价格，即 $F=S_0e^{uT}$，Z 是在测度$\mathbb{Q}$之下服从标准正态分布的随机变量.

因此双重货币合约中的远期合约在 0 时刻的价值是

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T-k) = e^{-rT}(\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T)F-k).$$

要使这样的合约可以存在于市场上，即要使它在 0 时刻的价值为 0，那么 k 必须是 $F\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2 T)$ 这显然与在英镑（本币）交易下的远期交易价格 F 不同. 因为 σ_1，σ_2 都是正的常数，所以要使双重货币合约中的远期交易价格比原来的远期交易价格大，当且仅当股票和汇率是负相关的.

这确实是件有意思的事情. 如果双重货币合约中的远期交易价格和原来在本币交易下的远期交易价格 F 相等的话，那么我们就可以在 0 时刻构造如下一个交易策略：

- 持有 $C_0\exp((r-u)T)$ 单位的敲定价格为 F 的双重货币远期合约.
- 卖空一单位的本币交易下的敲定价格为 F 的远期合约.

如果假定是正确的话，那么这一交易策略在 0 时刻是无须任何成本的，而在时间 T 时，这一静态的复制策略将得到的美元收益是

126

$$C_0\exp((r-u)T)(S_T-F) - C_T(S_T-F) = (C_0\exp((r-u)T)-C_T)(S_T-F).$$

注意到 $C_0\exp((r-u)T)$ 是 C_T 的远期 FX 利率. 现在我们来考察负相关的影响. 如果股票价格高于它的远期而同时 FX 利率低于它自身的远期价格的话，那么这一交易策略在时间 T 时的价值就是正的. 或者，如果股票价格低于它的远期价格 F 同时 FX 利率则高于它自身的远期价格的话，这一交易策略的美元价值也是正的.

负相关将使得这种双赢的局面成为可能. 完全负相关使之成为必然. 因此，如果双重货币合约中的远期价格的确是 F 的话，将不难构造套利机会. 所以在负相关条件下，双重货币和约中的远期价格必须大于 F.

4.5.4　数字合约

一份数字合约，它的到期支付是 $I(S_T>k)$ 美元，它在0时刻的价格是 $V_0=e^{-rT}\mathbb{Q}(S_T>k)$，或者如果记 $F_Q=F\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2T)$，即为双重货币合约中的远期价格，那么

$$V_0=e^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{F_Q}{k}-\frac{1}{2}\sigma_1^2T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right).$$

再一次为 $\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2T)$ 项惊讶，且在一个更‘干净’的期权中. S_T 大于 k 这一事件与这一期权是英镑支付还是美元支付无关. 但是复制定价这一期权时，不是在测度 $\mathbb{P}$ 之下进行的. 复制策略包含了与股票价格是相关的汇率.

4.5.5　看涨期权

最后，我们可以计算双重货币合约中的看涨期权的价格 $e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left((S_T-k)^+\right)$，为

$$V_0=e^{-rT}\left\{F_Q\Phi\left(\frac{\log\frac{F_Q}{k}+\frac{1}{2}\sigma_1^2T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F_Q}{k}-\frac{1}{2}\sigma_1^2T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

也许对一个对数正态模型并不奇怪，这只是用双重货币合约中的远期价格 F_Q 表出的 Black-Scholes 公式.

习题

4.3　假设 NNT，一支日本国的股票，它的价格过程是 S_t，C_t 是美元对日元的汇率，表示1美元的日元价格，ρ 是两者的相关系数，其他假设和本节中的模型相同. 此时的错位转换支付下的远期交易价格在表达形式上与英镑情形下相比，有什么不同呢？

127

第5章 利　率

时间就是金钱，今天的1美元比明天的1美元更值钱，明天的1美元比明年的1美元更值钱．那么，时间的价值到底是多少？每一天的时间价值都是相同的吗？货币的价格随着时间变化而变化吗？

利率市场就是货币价格变化的场所．拥有明天的钱、一年后的钱、十年后的钱的成本是多少？前面，我们在模型中作了假设，假设货币的成本是常数，但实际上并非如此．一段时期货币的价格不仅仅依赖于时间期限的长度，而且依赖于利率市场每时每刻的随机波动．于是，货币表现得像股票一样，有一个由 Brown 运动驱动的噪声价格．

利率市场的不确定性使建立在货币未来价格基础上的衍生工具的产生成为可能．债券、债券期权、利率互换、不同货币时间价值的奇异合约（exotic contract）等等都是由基本的利率证券引出的，正如股票期权由市场中的股票所导出．从名义现金流来看，这样的利率衍生产品市场比股票衍生产品市场要复杂得多．幸运的是，我们仍可以按照前面所用的无风险套期保值方法计算这些产品的价格．

5.1 利率市场

最基本的利率合约就是现在支付一定的现金量以换取将来（通常）更多现金流的一个协议．一般地说，这类合约的价值除了依赖于货币的时间价值以外，还依赖于其他一些因素，如承诺者的信誉以及协议的合法性．诸如信用度及类似的因素不是这里所关心的问题，对它们定价是债券市场而不是利率市场所要考虑的．我们只关心无违约（default-free）债贷货币的时间价值．

仅仅需要两个量就可以刻画这个基本合约．一是它的时间长度，或者说到期时间，它记录了我们接受以后支付的时刻；另一个是到期支付与初始成本的比例．我们称到期时间为 T，最后支付的比例在初始时刻的值为 $P(0,T)$．换句话说，T 时刻1美元可以在零时刻以 $P(0,T)$ 美元购买 T 时刻的1美元．

5.1.1 贴现债券

我们也可以把将来1美元的承诺作为资产，该资产在 T 之前的任何时刻 t 都有其价格，该资产称为贴现债券（discount bond）．$P(0,T)$ 为其在零时刻的价格，在到期时间 T 之前的任何时刻 t 都有不同的价格 $P(t,T)$．从而，在 T 时刻收到1美元的合约在 t 时刻的价格 $P(t,T)$ 为时间的过程——可交易证券的价格过程．

对任何到期时间 T，就像股票市场一样，也有一可交易资产，其价格过程为随机的．我们认为应该可以对其行为进行建模，并且对用来对冲其风险的 T-债券的期权定价．（惟一的差别在于技术上的不同，债券朝着它的既定的终端运动——在到期日 T，债券的价值为 1 美元，即 $P(T,T)=1$；而股票将来的价值却不可知．然而这种差别对定价来说并不是问题．）

可是，到期日并不惟一，对无数可能的到期日都可以对应一个合约．这样，不同到期日的债券是相关的．短期来看，十年期的债券与九年期的债券，在短期内价格变化非常类似．我们不能把不同的债券像股票一样孤立对待，这是利率市场中存在的真实的挑战：基本的贴现债券由两个时间指标——初始时刻与终端时刻作为参数．从而，债券价格是两个时间变量的函数，而股票价格仅仅依赖于一个时间参数．

129

债券价格的图像事实上是一个三维空间中的二维曲面，我们可以用一个二维截面切割它．两个例子说明如下：沿着直线 $t=0$（图 5-1）和 $T=10$（图 5-2）分别切割该曲面得到了两个截面图．

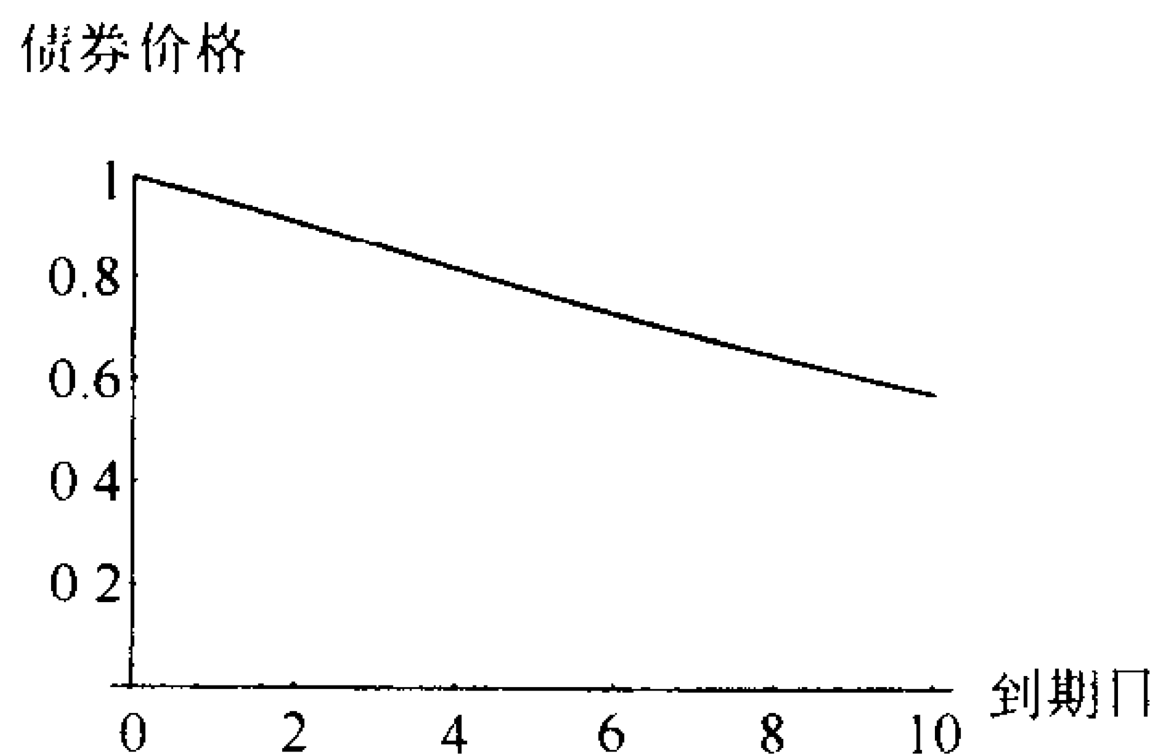


图 5-1　债券当前的价格

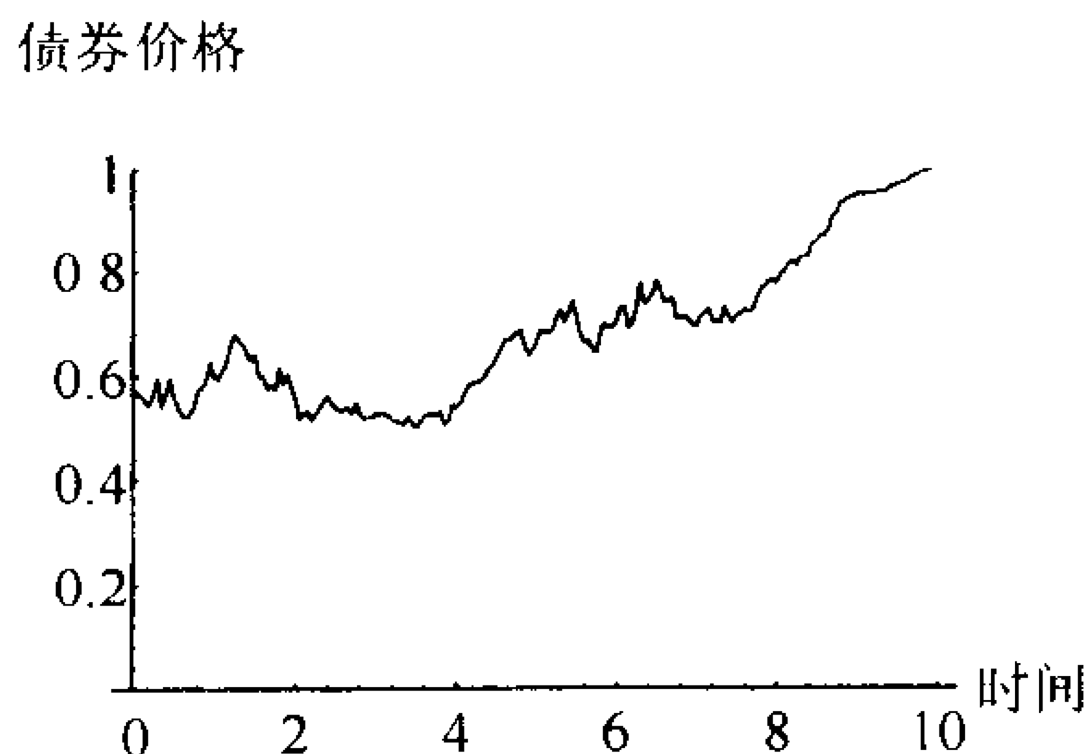


图 5-2　10 年期债券价格与时间的关系

图 5-1 不是一个资产的价格过程，而是不同资产（不同到期日的债券）当前价格的谱图．它反映了货币的时间价值，正好量化了现在拥有现金比将来拥有现金好多少．一般说来，离支付日越远，债券当前的价值越小．图 5-2 是一个特别资产（十年期贴现债券）的价格．它不是一条光滑曲线，而是一个带有噪声的随机过程，在其到期日达到面值 1．图5-2 的起点是图 5-1 的终点，其值为 $P(0,10)$，是 10 年后收到的 1 美元在现在的价值．

5.1.2　收益

图 5-1 中的曲线并没有特别地反映出市场所发生的变化．猛地看上去，除了告诉我们现在的一块钱比以后的一块钱更值钱之外，该图并没有告诉我们更多的含义．能较好地描述市场的是债券所隐含的平均利率．如果利率为常数 r，到期日为 T 的债券在 t 时刻的价格为 $e^{-r(T-t)}$．这时，r 可由 $P(t,T)$ 给出，即 $r=-\log P(t,T)/(T-t)$．

130

在利率不是常数的情况下，上述表示也是有用的．我们所导出的利率 $R(t,T)$，称为收益（yield），对任何小于 T 的 t，该映射为从价格到收益的 1—1 映射——没有丢失任何信息．

收益

给定 t 时刻贴现债券价格 $P(t,T)$，收益 $R(t,T)$ 由下式给出

$$R(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}.$$

从而，对任何给定的债券价格贴现曲线，都可以产生一条收益曲线（yields curve）；即对任意给定的 t，该曲线为 $R(t,T)$ 关于 T 的图像.

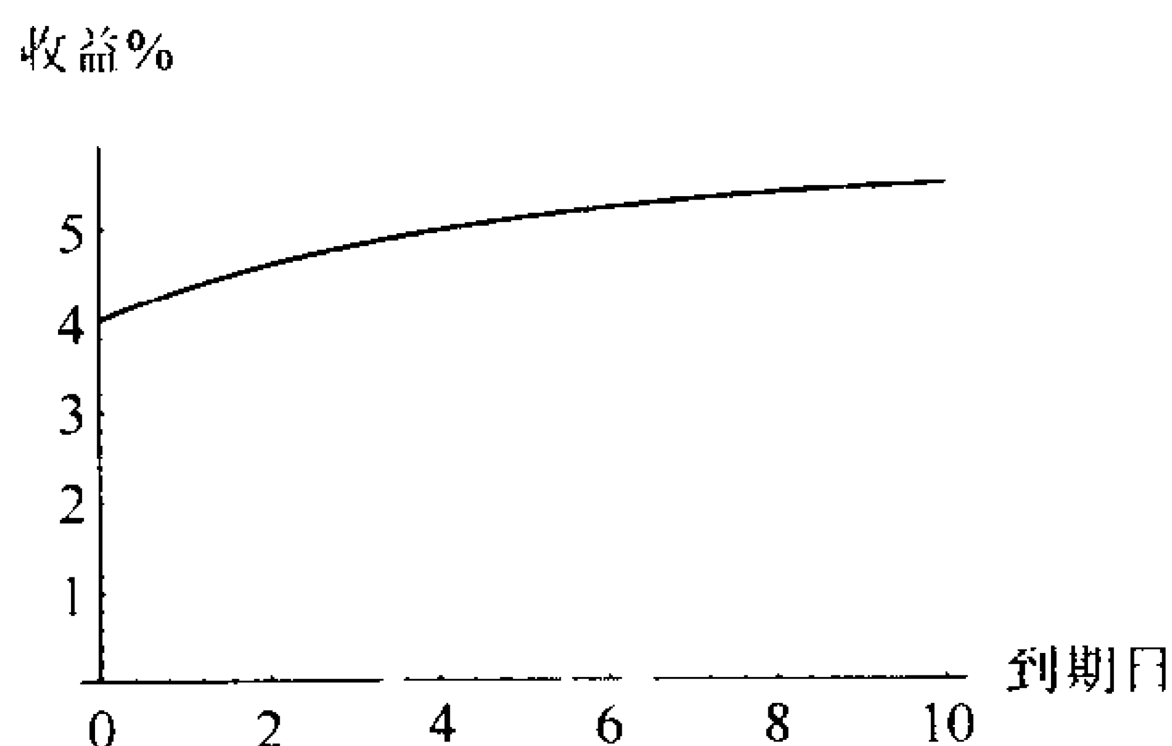


图 5-3 $t=0$ 时的收益曲线

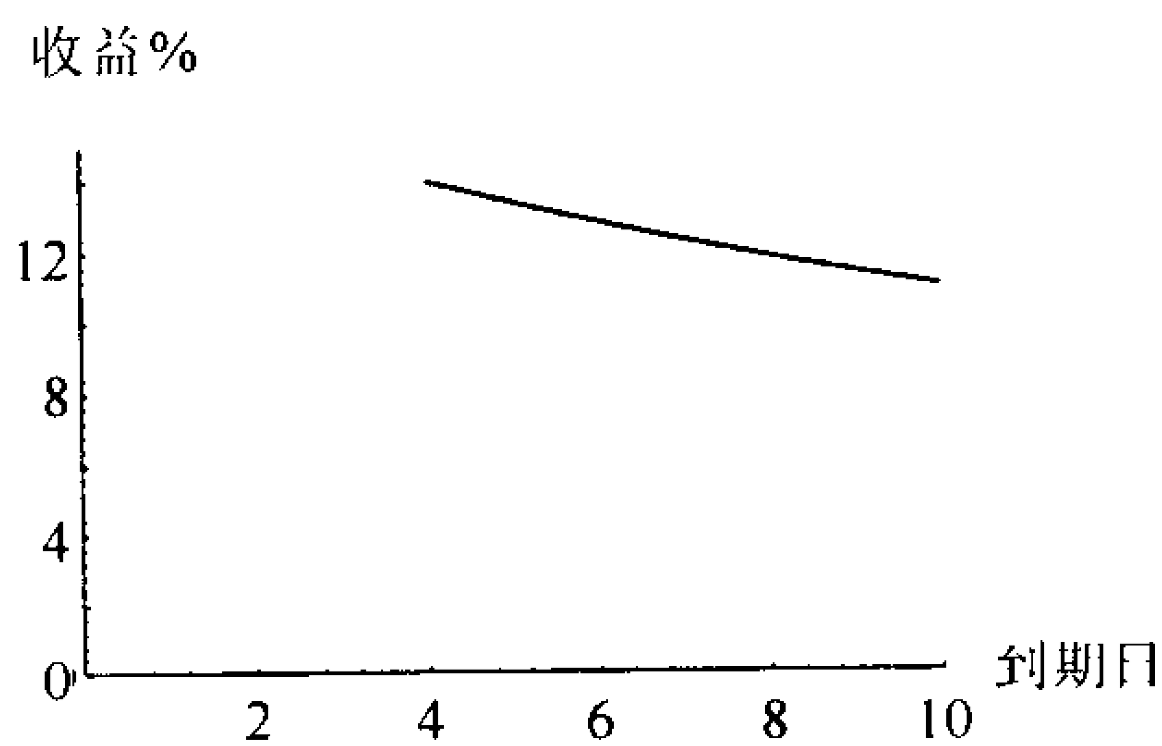


图 5-4 $t=4$ 时的收益曲线

我们一眼便能看出，债券价格曲线与收益曲线含有完全相同的信息. 一方面，长期债券的价格总是低一些，因此债券价格曲线总是向下倾斜的，因此是多余的. 另一方面，收益曲线可以为关于到期日 T 的增函数或者减函数，这揭示了债券的平均回报与到期期限之间的关系——市场的期限结构（term structure）.

不同到期日收益之间的差异反映了市场对将来利率的信念. 如果将来利率可能是较高的，则长期借贷要比短期借贷付更高的利率. 由于到期期限长，利率的不确定性更大，因此一个典型的收益曲线随到期日的增加而上升. 但是，如果当前的利率是高的而预期它将回落，则收益曲线是逆转的，长期债券的收益将比短期债券的收益低（图 5-4). 一个好的模型应该能够体现这些可能性. 131

5.1.3 瞬时利率

现在我们再来看货币的价格是什么？尽管收益曲线揭示了不同时期的借贷利率，但是，如果我们能用一个数来概括当前的借贷成本，将会方便得多. 我们能做的是考察瞬时借贷的当前利率，即（几乎）立刻偿还的借贷利率. 如果在时刻 t 借入，借款期限为 t 到 $t+\Delta t$，其中 Δt 是小的时间增量，则收益率为 $R(t,t+\Delta t)$：

$$R(t,t+\Delta t) = -\frac{\log P(t,t+\Delta t)}{\Delta t}.$$

时间增量越小，该值越逼近于 $R(t,t)$，它是 t 时刻收益曲线的左端点. 称该值为瞬时利率（instantaneous rate）或者短期利率（short rate）r_t，可由下面的两个表达式表述：

$$r_t = R(t,t),$$

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,t).$$

瞬时利率仅仅是时间的一个过程，与其他参数没有关系，图5-5描述的是与图5-2 10年期债券的演化相对应10年期短期利率的例子.

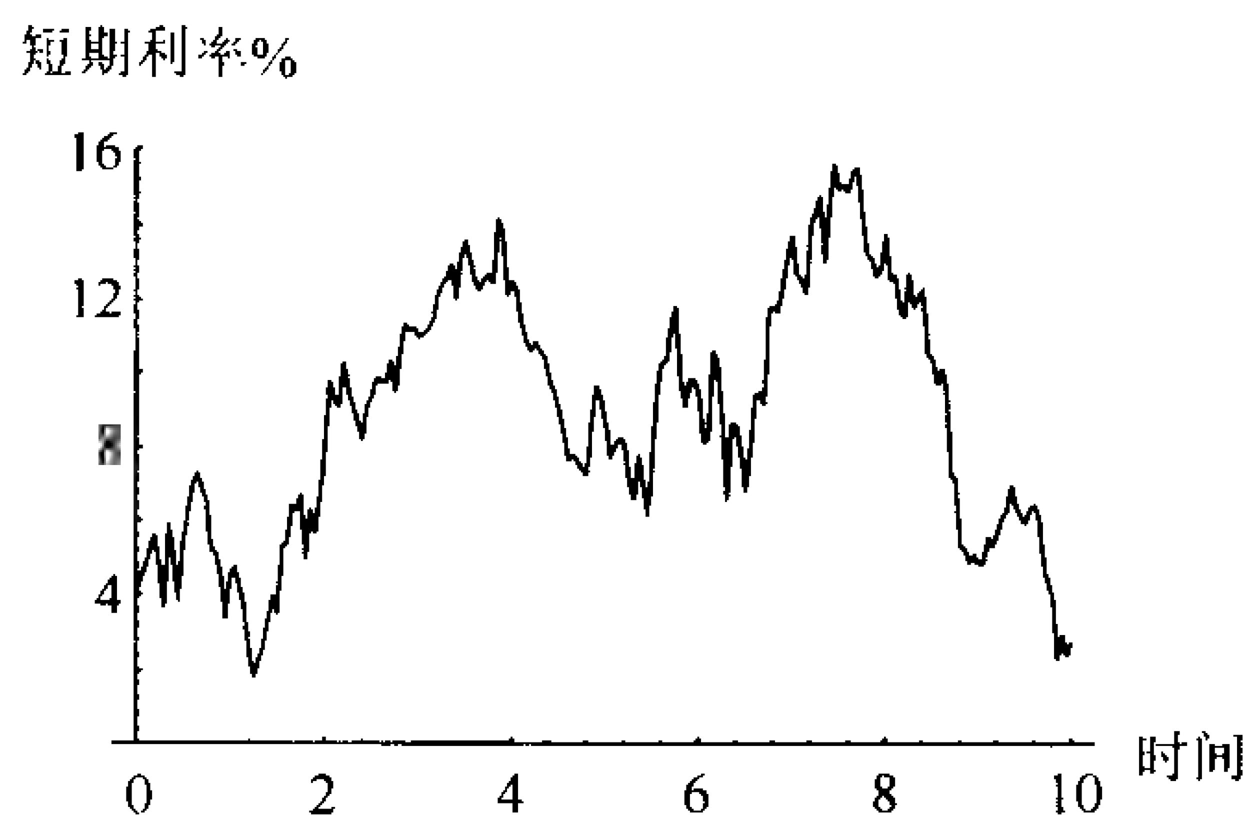


图5-5　瞬时利率

如果短期利率与债券价格相关，我们可以看到它们之间的相互影响．比如短期利率越高，债券价格越低，在图5-5中的4年和8年的时刻利率升高而债券价格却降低．更有趣的是，从图5-4中的反转曲线可以看出，$t=4$ 时刻的短期利率甚至超过了长期债券的递增的收益.

132

瞬时利率不仅仅是利率市场中的一个重要过程，而且其行为已促进了许多模型的建立，所有债券的价格都可由所建立的利率模型推出.

5.1.4　远期

短期利率过程 r_t 不是贴现价格曲线 $P(t,T)$ 的1—1映射，因而丢失了一些信息．一般地，仅仅给出 r_t，不给出债券价格运动的额外情况是不能得到曲线 $P(t,T)$ 的．然而，瞬时利率用起来很方便．我们所需要做的是将 r_t 推广，在保持瞬时性的前提下，能将价格 $P(t,T)$ 与收益 $R(t,T)$ 1—1对应起来.

考虑一远期合约，在时刻 t 双方约定在此之后的时刻 T_1 作出支付，在 T_1 之后的 T_2 得到偿还．这样，便对 T_2-债券敲定了一个远期．那么应支付的远期价格是多少?

复制该合约的一个方法是：在 t 时刻买入一份 T_2-债券，卖出 k 份 T_1-债券．因此在 t 时刻，该交易的初始成本为 $P(t,T_2)-kP(t,T_1)$，到 T_1 时需支付 k 美元，到 T_2 时刻得到1美元．为了使该合约的初始价值为零，所选择的 k 必定为

$$k = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)},$$

该 k 一定是 T_1 时刻所购买的 T_2-债券的无套利远期价格．所对应的（远期）收益为

$$-\frac{\log P(t,T_2) - \log P(t,T_1)}{T_2 - T_1}.$$

如果我们选择的 T_1 和 T_2 非常接近，比如，$T_1=T$，$T_2=T+\Delta t$，当 Δt 越来越小时，上

述远期收益收敛于瞬时借款的远期利率，即

$$f(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T).$$

133

该利率，简单地称为远期利率（forward rate），为 T 时刻瞬时借款的远期价格．正如我们所期望的，现在时刻，即 $T=t$，借款的“远期”利率就是当前的瞬时利率，也就是说

$$f(t,t)=r_t.$$

然而，不像 r_t，给定远期利率 $f(t,T)$ 可以得到 $P(t,T)$ 的价格以及收益曲线 $R(t,T)$．图 5-6 给出了一个 $f(t,T)$ 的特例．

表面上看，远期利率曲线很像债券收益曲线（图 5-3）．收益曲线与远期曲线确实在曲线的左端点（都为瞬时利率）重合，一般来说在其他点两条曲线是不相同的．对 $R(t,T)$ 进行微分并整理得到

$$f(t,T)=R(t,T)+(T-t)\frac{\partial R}{\partial T}(t,T).$$

该公式告诉我们：如果收益曲线是上升的，则远期利率大于收益，反之则小于．

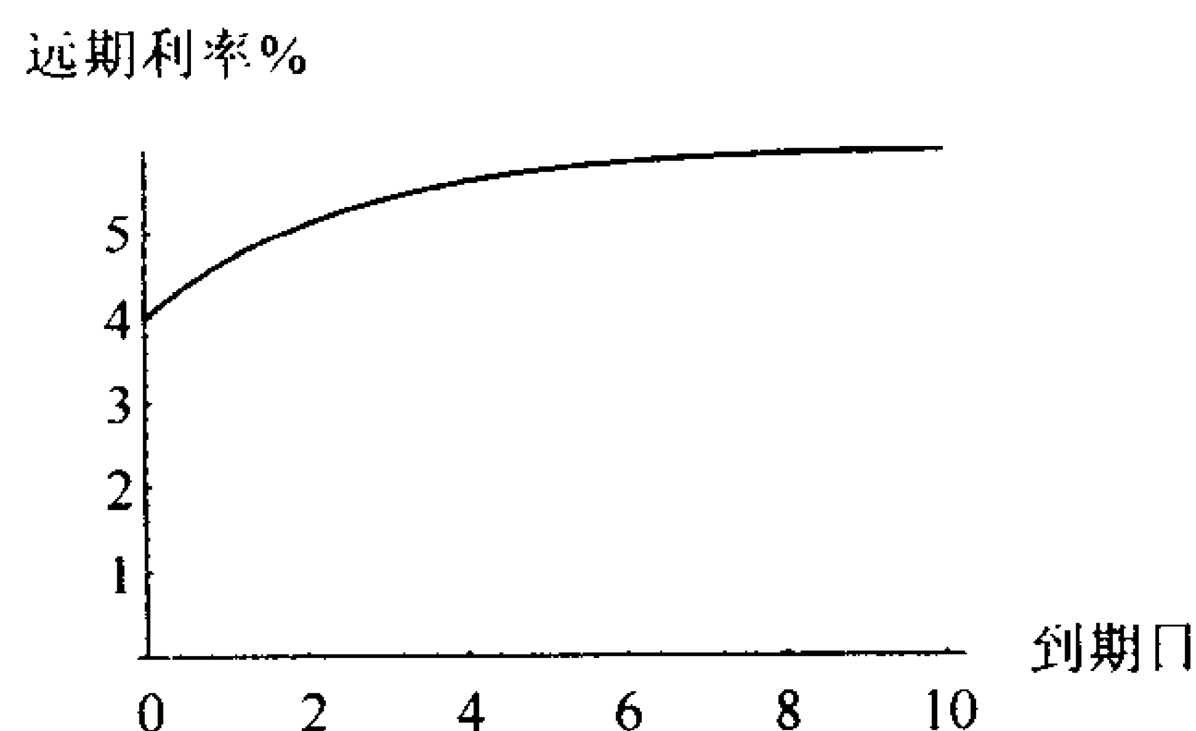


图 5-6　$t=0$ 时刻的远期利率曲线

远期利率作为时间而不是到期日的函数，不是那么光滑的，但是作为由初始值 $f(0,T)$ 出发的随机过程，仍可以得到 T 时刻的 r_T.

134

5.1.5　小结

存在无违约的零息票贴现债券市场．T 时刻支付 1 美元的 T-债券在 t 时刻的价格为 $P(t,T)$．债券在剩余时期的平均收益为 $R(t,T)$，在将来某时刻 T 瞬时借款利率的现价为远期利率 $f(t,T)$．瞬时即期借款利率的价格为 $r_t=R(t,t)=f(t,t)$.

这两个相互联系的利率 $R(t,T)$ 和 $f(t,T)$，包含了债券原来所有的价格信息，可以相互导出．严格地表达如下：

利率市场小结

远期利率及收益可以用债券价格表示为

$$f(t,T)=-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T),\quad R(t,T)=-\frac{\log P(t,T)}{T-t}.$$

反之，债券价格可以由远期利率或收益表示为：

$$P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,\mathrm{d}u\right),$$

$$P(t,T)=\exp(-(T-t)R(t,T)).$$

换言之，通过对它们三者中任意一个进行建模，便可以自动得到另外两者．

5.2　一个简单模型

一个具体的例子说明如下．这一章的关键在于我们可以完全按照股票模型那样对利率进行建模．Itô 公式既难于理解，对模型的建立意义也不大——就像建立 Black-Scholes 公式一样，真正起作用的是鞅表示定理．在 Black-Scholes 公式中，仅仅有两个标准资产可供交易（股票和债券），然而，现在有无数的潜在的贴现债券．在这些债券中仅仅挑选两个似乎厚此薄彼，但这种担心将被证明是多余的．在风险中性测度下，可证明所有可交易品种都是鞅，它不依赖于基本标的选择．

135

简单利率模型

给定一个初始的 T-可积远期利率曲线 $f(0,T)$，远期利率曲线的演化表示为：

$$\mathrm{d}_t f(t,T)=\sigma \mathrm{d}W_t+\alpha(t,T)\mathrm{d}t,$$

其中，σ 为常数波动率，α 为漂移，它是关于时间和到期日的确定性函数．

我们通过建立关于远期利率而不是任何资产价格的微分方程来描绘市场．然而，像第4章一样，只要不使用 Itô 方法对某些东西定价，就不会有问题．

远期利率可以表示为

$$f(t,T)=\sigma W_t+f(0,T)+\int_0^t \alpha(s,T)\,\mathrm{d}s.$$

从而，远期利率服从正态分布，不同到期日的远期利率的运动是完全相关的，两者之差 $f(t,T)-f(t,S)$ 是确定的．该模型中只有一个随机性来源——Brown 运动 W_t，且它是关于时间 t 而不是到期日 T 的过程．

5.2.1　可交易证券

可交易证券可能不是 Itô 过程，那么到底是什么？很明显，我们需要选择一个计价单位．尽管在第6章将证明计价单位的选取并不重要，通常人们会选择一种标准的计价单位——由瞬时利率 r_t 生成的现金债券 B_t．B_t 满足

$$\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t,\ B_0=1.$$

136

因为 $r_t=f(t,t)$，很容易写出它的积分方程

$$r_t = \sigma W_t + f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\,\mathrm{d}s.$$

[技术上的难点：r_t 所满足的随机微分方程并不是 $f(t,T)$ 满足的随机微分方程在 $T=t$ 时的表达式，由 Itô 公式有 $\mathrm{d}r_t=\mathrm{d}_t f(t,t)+\frac{\partial f}{\partial T}(t,t)$.] 不像在基本的股票模型中，利率为常数．这里，利率为一服从正态分布的随机过程，从而可能取负值．后面将给出克服这一缺点的模型，目前为简单起见，暂时采用此模型．对现金债券 $B_t=\exp\left(\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right)$，它的表达式稍有点复杂

$$B_t = \exp\left(\sigma\int_0^t W_s\mathrm{d}s + \int_0^t f(0,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right).$$

这将成为可交易的计价单位．

另一个可交易资产是什么？如前面提到的．虽然选择哪一个都似乎看起来厚此薄彼，让我们还是选择其一．对固定的 T，T-到期债券的价格 $P(t,T)$ 为

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,\mathrm{d}u\right)$$

$$\text{或 } P(t,T) = \exp\left(-\left(\sigma(T-t)W_t + \int_t^T f(0,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right).$$

5.2.2 复制策略

如果我们想要复制某个小于 T 的到期日为 S 的未定权益 X（这样在未定权益到期之前，T-债券仍可交易）．在第 2 章、第 3 章与第 4 章采用了三步复制策略，因此，至少首先可以如下进行：

三步复制法（利率市场）

(1) 找一测度$\mathbb{Q}$，使得在$\mathbb{Q}$下，由现金债券贴现的 T-债券 $Z_t=B_t^{-1}P(t,T)$ 为一鞅．

(2) 构造过程 $E_t=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X\mid\mathcal{F}_t)$．

(3) 找一可料过程 ϕ_t，使得 $\mathrm{d}E_t=\phi_t\mathrm{d}Z_t$.

137

首先，我们考察看起来复杂的贴现债券价格过程 $Z_t=B_t^{-1}P(t,T)$：

$$Z_t = \exp\left(-\left(\sigma(T-t)W_t + \sigma\int_0^t W_s\mathrm{d}s + \int_0^T f(0,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t\int_s^T \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right).$$

注意到 $\sigma(T-t)W_t$ 项可微，可由乘法法则处理，而指数中的其他项要么是常数，要么也可微，由 Itô 公式，便得 Z_t 所满足的随机微分方程为

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t\left(-\sigma(T-t)\mathrm{d}W_t - \left(\int_t^T \alpha(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)^2\mathrm{d}t\right).$$

接下来的步骤就很熟悉了，尽管以前的现金债券 B_t 为确定性的，但现在的（随机）B_t 及

T-债券 $P(t,T)$ 都是适应于同一个 Brown 运动 W_t，因此找到 Z_t 没有本质上的困难.

步骤 1

得到 Z_t 的 SDE 后，首先要考察是否能找到测度变换下的 Brown 运动的漂移 γ_t，使得在新的测度下，Z_t 为无漂移的. 很明显，这个 γ_t 应为

$$\gamma_t = -\frac{1}{2}\sigma(T-t) + \frac{1}{\sigma(T-t)}\int_t^T \alpha(t,u)\,du.$$

因为直到 S 时刻 γ_t 都是有界的，满足了 C-M-G 定理的条件，从而可以找到测度$\mathbb{Q}$ 与$\mathbb{P}$ 等价，使得 $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ 为$\mathbb{Q}$-Brown 运动，现在贴现价格过程 Z_t 满足的随机微分方程变成

$$dZ_t = -\sigma Z_t(T-t)\,d\tilde{W}_t.$$

从而，过程 Z_t 的漂移为 0，因为直到 S 时刻 $\sigma(T-t)$ 有界，故 Z_t 为$\mathbb{Q}$-鞅.

步骤 2

令 E_t 表示贴现权益 $B_S^{-1}X$ 的$\mathbb{Q}$-条件期望，即

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

138 由于 E_t 也像 Z_t 一样为$\mathbb{Q}$-鞅，便有步骤 3.

步骤 3

由鞅表示定理，可通过一$\mathcal{F}$可料过程 ϕ_t 把它们联系起来

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X) + \int_0^t \phi_s dZ_s.$$

那么，交易的策略又如何呢? 在 t 时刻，

- 持有 ϕ_t 份 T-债券 $P(t,T)$.
- 持有 $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ 份现金债券 B_t.

此投资组合在时刻 t 不考虑贴现的价值为

$$V_t = \phi_t P(t,T) + \psi_t B_t = B_t E_t.$$

仍同前面的方法一样，$dV_t = \phi_t d_t P(t,T) + \psi_t dB_t$，从而此策略是自融资的. 它的初始成本为 $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X)$，终端值为 $V_S = X$，因而该投资组合套期保值了权益 X 且无套利.

期权定价公式（利率）

t 时刻 X 的价格为

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

5.2.3 无免费午餐

到目前为止，一切顺利. Itô 方法尽管比较难却非常有用，我们得到了另外一种类型的股票模型. 所选择的 B_t 以及 $P(t,T)$ 就如同第 4 章的可交易证券. 但是某些事情可能会让我

们困惑．我们选择了一个特别的债券——T-债券，并找到了相应的测度变换．至此，所有 T 之前的 S 到期的权益都可以被套期保值，甚至有其他到期日的债券也可以以相同的公式来套期保值．

从而，我们有两种方法可以对 S-债券定价得 $P(t,S)$．一种是由它所满足的随机微分方程直接导出；另一种是间接法，即把 $X=P(S,S)=1$ 当作权益，通过用现金债券与 T-债券套期保值而得到． 139

没有明显的原因解释为什么给定了原有的债券模型，由这两种方法所得到的价格是相同的，而且一定是相同的．设想一下，如果套期保值的价格与 $P(t,S)$ 不相等，比如小于 $P(t,S)$，那么我们就可以套利从而有无限的获益．然而，我们并不想要免费午餐，不允许现实世界存在免费午餐．因此，应对现实实际的模型施加一些合适的条件以便用不同的方法得到相同的债券价格 $P(t,S)$．这些条件是什么呢？

考虑 S-债券的贴现过程，$Y_t=B_t^{-1}P(t,S)$．再次由 Itô 公式得：

$$dY_t = Y_t\left(-\sigma(S-t)dW_t-\left(\int_t^S\alpha(t,u)du\right)dt+\frac{1}{2}\sigma^2(S-t)^2dt\right).$$

如果定义 γ_t^S 为

$$\gamma_t^S=-\frac{1}{2}\sigma(S-t)+\frac{1}{\sigma(S-t)}\int_t^S\alpha(t,u)du,$$

则

$$dY_t=-\sigma Y_t(S-t)(dW_t+\gamma_t^S dt),$$

或由 $\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\tilde{W}_t$ 表示为

$$dY_t=-\sigma Y_t(S-t)(d\tilde{W}_t+(\gamma_t^S-\gamma_t)dt).$$

贴现过程 Y_t 一定为一 $\mathbb{Q}$-鞅，它是可交易资产，由无风险套期保值复制得 $Y_t=B_t^{-1}P(t,S)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}|\mathcal{F}_t)$．因此，上述随机微分方程的漂移项必定为零：$\gamma_t^S=\gamma_t$.

这便是我们所要得到的约束条件——所选择的 T 在无套利条件下，必定不影响过程 γ_t，也就是 γ_t 必定独立于 T，即 $\frac{\partial\gamma}{\partial T}=0$.

将 γ_t 的表达式左右两边同乘以 $\sigma(T-t)$，并关于 T 求微分，得：

漂移的约束条件

在无套利市场中，漂移 $\alpha(t,T)$ 满足

$$\alpha(t,T)=\sigma^2(T-t)+\sigma\gamma_t.$$

在股票市场中找不到上述方程相应的表达式，该方程阐明了，要使市场无套利，远期利率的漂移所需满足的条件．漂移 $\alpha(t,T)$ 以前是时间与到期日的一般确定性函数，而这里却可以表示为一特殊函数($\sigma^2(T-t)$)及与到期日无关的过程($\sigma\gamma_t$)之和．大多数一般函数并不具有这种性质． 140

从另一角度上看，这确实是我们所熟悉的，在测度$\mathbb{P}$下$P(t,T)$满足以下的SDE：

$$d_tP(t,T) = P(t,T)(-\sigma(T-t)dW_t + (r_t - \sigma(T-t)\gamma_t)dt).$$

在上式中，γ_t表示风险的市场价格（见4.4节）．我们知道，市场中的每一证券必定有相同的风险市场价格，这也解释了为什么γ_t并不依赖于到期日T的选取．

要特别强调两点．一是存在一测度$\mathbb{Q}$不仅仅使一个贴现债券，而且使每一个贴现债券同时为鞅．我们曾经担心对某一债券的选择会厚此薄彼，现在这种担心已经没有了．在本模型中只有一个Brown运动，这就是原因所在．如果冻结时间，只考虑一个固定时刻t，不同到期日的债券价格$P(t,T)$之间是可以相互确定性转换的．如果可以用测度变换处理其中一个债券，也就可以处理其他所有的债券．

以上反映出债券市场与股票市场大致相同之处，第二件事情我们要说明对上述成功需要付出一些代价的．如果将$f(t,T)$原来的随机微分方程用$\mathbb{Q}$-Brown运动$\widetilde{W}_t$表出：

$$d_tf(t,T) = \sigma d\widetilde{W}_t + \sigma^2(T-t)dt.$$

在Black-Scholes理论中，漂移$\alpha(t,T)$为零．但这里必须通过与γ_t相对应的测度变换重新获得$\alpha(t,T)$，其中γ_t不依赖于T. 因而，我们不能随意选择$\alpha(t,T)$作为t和T的任意函数，这一点和Black-Scholes理论不同，我们需要对原来现实世界的漂移施加一些约束．

尽管获得成功过程有点复杂，但毕竟得到了所需的结果．我们构造了一个无套利、完备的随机利率模型，所有权益都可以由标的债券完全套期保值，从而可以通过复制得到其价格．

141

由$\mathbb{Q}$-Brown运动$\widetilde{\mathbf{W}}_t$表示的债券及利率

债券价格、远期利率及短期利率由以下关系式给出：

$$P(t,T) = \exp\left(-\left(\sigma(T-t)\widetilde{W}_t + \int_t^T f(0,u)du + \frac{1}{2}\sigma^2T(T-t)t\right)\right),$$

$$B_t = \exp\left(\sigma\int_0^t \widetilde{W}_s ds + \int_0^t f(0,u)du + \frac{1}{6}\sigma^2t^3\right),$$

$$f(t,T) = \sigma\widetilde{W}_t + f(0,T) + \sigma^2(T - \frac{1}{2}t)t,$$

$$r_t = \sigma\widetilde{W}_t + f(0,t) + \frac{1}{2}\sigma^2t^2.$$

5.3　单因子HJM模型

现在，将特殊推广到一般情况．由基本思想——收益曲线的所有三种表述：债券价格

$P(t,T)$、收益 $R(t,T)$ 及远期利率 $f(t,T)$ 是等价的，因而可以选择其中之一对其进行建模．Heath-Jarrow-Morton 是基于瞬时远期利率 $f(t,T)$ 建立了影响广泛的、技术上严格的利率模型．

单因子 HJM 模型

给定一初始的远期利率曲线 $f(0,T)$，对每一到期日 T 的远期利率满足以下方程：

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma(s,T)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \alpha(s,T)\,\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

或写成微分形式：

$$\mathrm{d}_t f(t,T) = \sigma(t,T)\,\mathrm{d}W_t + \alpha(t,T)\,\mathrm{d}t.$$

波动率 $\sigma(t,T)$ 及漂移 $\alpha(t,T)$ 可能依赖于 Brown 运动 W_t 的历史以及直到 t 时刻的利率本身．

142

对任何固定的到期日 T，远期利率按照其自身的波动率 $\sigma(t,T)$ 及漂移 $\sigma(t,T)$ 运动．在 5.5 节，我们将条件放宽到利率可以不完全相关的情况．但是在这里，远期利率是简单的过程，由惟一的$\mathbb{P}$-Brown 运动 W_t 驱动，且该 Brown 运动也驱动每一个其他到期日的远期利率过程，远期利率增量的变化，继而所有的收益及所有的债券价格都是完全相关的．

前面对波动率和漂移函数的精确性质的描述是不太严密的．HJM 模型对 σ 及 α 设定了很少的连贯性条件，但逐渐地加强了一些技术上的约束．把这些技术上的条件收集在一起，加以简化放在下面方框中．其中，前面两个条件保证了 $f(t,T)$ 所满足的随机微分方程解的存在性与惟一性；后面两个条件保证了使用 Fubini 定理的可行性，使得 $f(t,T)$ 的积分关于 T 的随机微分等于 $f(t,T)$ 的随机微分的积分．给定这些条件，也就满足了 HJM 模型的前三个条件（他们论文中的 C1－C3）．

单因子 HJM 模型：波动率与漂移所应满足的条件

我们假设

- 对每个 T，过程 $\sigma(t,T)$ 及 $\alpha(t,T)$ 为可料的且仅仅依赖于时刻 t 之前的 Brown 运动的历史，并且在以下意义下可积，即 $\int_0^T \sigma^2(t,T)\,\mathrm{d}t < \infty$，$\int_0^T \left|\alpha(t,T)\right|\mathrm{d}t < \infty$．
- 初始远期利率 $f(0,T)$ 为确定性的且满足 $\int_0^T \left|f(0,u)\right|\mathrm{d}u < \infty$．
- 漂移 α 有限可积 $\int_0^T\int_0^u \left|\alpha(t,u)\right|\mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty$．
- 波动率 σ 有有限的期望 $\mathbb{E}\int_0^T \left|\int_0^u \sigma(t,u)\,\mathrm{d}W_t\right|\mathrm{d}u$．

5.3.1 计价单位

在第 6 章将证明，计价单位的选取为任意的，但考虑到计算上的方便，通常会有一个标准的选择．由远期利率 $f(t,T)$ 可以得瞬时利率 $r_t = f(t,t)$（未必为马氏的）的积分方程为：

143

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\,\mathrm{d}W_s + \int_0^t \alpha(s,t)\,\mathrm{d}s.$$

最简单的现金产品为储蓄账户或债券，即在零时刻为1美元，以这个利率连续再投资得到的债券 B. 换句话说，B 为随机过程，满足 SDE：

$$\mathrm{d}B_t = r_t B_t \mathrm{d}t,\ B_0 = 1,\text{或者 } B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right).$$

积分后得：

$$B_t = \exp\left(\int_0^t \left(\int_s^t \sigma(s,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}W_s + \int_0^t f(0,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t\int_s^t \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right).$$

上述推导利用了 HJM 模型中的最后一个技术性条件，保证积分 $\int_0^t\left(\int_0^u \sigma(s,u)\,\mathrm{d}W_s\right)\mathrm{d}u$ 可以交换得 $\int_0^t\left(\int_s^t \sigma(s,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}W_s$，从而得到了我们所需的币值.

5.3.2 债券价格

我们需要一可交易资产，现在我们已经有了，即债券 $P(t,T)$. 因为远期利率 $f(t,T)$ 与债券价格是 1－1 对应的，债券价格包含在由远期利率信息中，即

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_0^T f(t,u)\,\mathrm{d}u\right),$$

它为 t 与 T 的连续函数. 如对远期利率 $f(t,T)$ 原来的方程积分可得债券价格 $P(t,T)$ 等于

$$\exp\left(-\left(\int_0^t\left(\int_t^T \sigma(s,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}W_s + \int_t^T f(0,u)\,\mathrm{d}u + \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right)\right).$$

重写上述表达式，正好得到了零时刻的价值（$\exp\left(-\int_0^T f(0,u)\,\mathrm{d}u\right)$）与 T 时刻的价值（即为1）.

144

5.3.3 贴现债券

现在，固定一特殊的到期日 T，我们着重考虑贴现资产价格，即 $Z(t,T) = B_t^{-1}P(t,T)$. 由上述现金债券及债券本身的表达式，得

$$Z(t,T) = \exp\left(\int_0^t \Sigma(s,T)\,\mathrm{d}W_s - \int_0^T f(0,u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t\int_s^T \alpha(s,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\right),$$

其中，$\Sigma(t,T)$ 为积分 $-\int_t^T \sigma(t,u)\,\mathrm{d}u$. 由 Itô 公式得 SDE

$$\mathrm{d}_t Z(t,T) = Z(t,T)\left(\Sigma(t,T)\,\mathrm{d}W_t + \left(\frac{1}{2}\Sigma^2(t,T) - \int_t^T \alpha(t,u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right),$$

这表明了变量 $\Sigma(t,T)$ 为 $P(t,T)$ 的对数波动率.

5.3.4 测度变换

按通常的方法，我们将通过测度变换将贴现债券转变成鞅．测度漂移的变化（风险的市场价格）为：

$$\gamma_t = \frac{1}{2}\Sigma(t,T) - \frac{1}{\Sigma(t,T)}\int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u.$$

如果技术性条件$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$ 成立，则由 Cameron-Martin-Girsanov 定理，存在一新的测度$\mathbb{Q}$ 与$\mathbb{P}$ 等价，使得 $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s \mathrm{d}s$ 为$\mathbb{Q}$ 下的 Brown 运动．在测度$\mathbb{Q}$ 下贴现债券价格满足 SDE：

$$\mathrm{d}_t Z(t,T) = Z(t,T)\Sigma(t,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_t,$$

为无漂移的．要使它为一合适的$\mathbb{Q}$-鞅，充分条件是 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \Sigma^2(t,T)\mathrm{d}t\right) < \infty$ 成立（见 3.5 节）．

债券价格 SDE

在鞅测度下，债券价格 $P(t,T)$的随机微分为

$$\mathrm{d}_t P(t,T) = P(t,T)(\Sigma(t,T)\mathrm{d}\widetilde{W}_t + r_t \mathrm{d}t).$$

145

5.2 节的具体模型特别说明了这种惊人的相似之处，我们得到了类似于 Black-Scholes 模型的一些结果，甚至对一般的利率模型如 HJM 模型也有此结果．在鞅测度下价格 $P(t,T)$不依赖于漂移 α，只依赖于波动率 Σ（为 σ 的函数)，这正如$\mathbb{Q}$ 下的 Black-Scholes 股票模型不依赖于原来的股票的漂移 μ 一样．

5.3.5 复制策略

我们进展得比原来预想的要快，已经找到了鞅测度，并得到了在该鞅测度下过程 $P(t,T)$ 的表达式．下面考察能否找到未定权益的复制策略．假设有一在时刻 S 到期的未定权益，如果用到期日为 T 的贴现债券对权益套期保值，惟一要求是 S 小于 T——不能用期限短的标的物对期限长的衍生产品套期保值．（除非将时间分成小段，每小段用期限短的债券复制．）为简单起见，我们选择一个大于 S 的到期日 T 的债券．

如前所述，套期保值的第二步为得到贴现权益 $B_S^{-1}X$（而不是 X）的条件$\mathbb{Q}$-期望．也就是定义$\mathbb{Q}$-鞅

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

为了使用鞅表示定理，要求债券波动 $\Sigma(t,T)$ 在 T 之前不能为零．在这个条件下，对鞅 $Z(t,T)$ 及贴现权益过程 E_t 应用鞅表示定理，得

$$E_t = E_0 + \int_0^t \phi_s \mathrm{d}Z(s,T),$$

其中 ϕ 为某个$\mathcal{F}$-可料过程.

因此，所需要的交易策略就为 T-债券与现金债券 B_t 的投资组合. 特别地，有:

- t 时刻持有 ϕ_t 份 T-债券.
- t 时刻持有 $\psi_t := E_t - \phi_t Z(t,T)$ 单位的现金债券.

146

则该投资组合 t 时刻的价值为

$$V_t = B_t E_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1} X \mid \mathcal{F}_t).$$

如果 $\mathrm{d}V_t = \phi_t \mathrm{d}_t P(t,T) + \psi_t \mathrm{d}B_t$，或等价地，$\mathrm{d}E_t = \phi_t \mathrm{d}_t Z(t,T)$，则策略$(\phi_t, \psi_t)$为自融资的. 由关于 ϕ_t 的 E_t 的定义，上述第二个等式成立，因此，所找的组合(ϕ_t, ψ_t)为自融资的，由此

衍生证券的定价

如果 X 为衍生证券在到期日 T 的支付，则其在 t 时的价值为

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right) X \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

5.3.6 无套利市场

由于 S-债券可以看作在 S 时刻到期的权益 $X=1$，因此，它在 t 时刻的价格为 $B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1} \mid \mathcal{F}_t)$. 或具体地说,

$$P(t,S) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^S r_u \mathrm{d}s\right) \middle| \mathcal{F}_t\right), \ t \leqslant S < T.$$

可以看出，鞅测度带给我们很大方便. 所有债券价格为在$\mathbb{Q}$下从 t 时刻与到期日之间的瞬时利率贴现的条件期望.

贴现的 S-债券 $Z(t,S) = B_t^{-1} P(t,S)$ 是什么? 现在可将它写为

$$Z(t,S) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_S^{-1} \mid \mathcal{F}_t).$$

就像5.2节中简单例子一样，所有其他贴现债券都为$\mathbb{Q}$下的鞅. 这意味着这些贴现债券在$\mathbb{P}$下的漂移是受到从离开鞅的一个简单测度变换的要求所约束的，换句话说，对所有的债券，市场的风险价格都相同，否则就存在套利机会.

147

因此，对债券的$\mathbb{P}$-漂移有限制，特别地，对所有的 T 必定有

$$\int_t^T \alpha(t,u) \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Sigma^2(t,T) - \Sigma(t,T)\gamma_t, \ t \leqslant T.$$

上式关于 T 求微分，得 $\alpha(t,T) = -\sigma(t,T)\Sigma(t,T) + \sigma(t,T)\gamma_t$，即

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)(\gamma_t - \Sigma(t,T)).$$

与5.2节中完全一样，其中$\sigma(t,T)=\sigma,\Sigma(t,T)=-\sigma(T-t)$，现实世界中漂移$\alpha(t,T)$与风险中性值$-\sigma(t,T)\Sigma(t,T)$仅相差为$\sigma(t,T)\gamma_t$.

在这个风险中性测度下，远期利率与瞬时利率可表示为

$\mathbb{Q}$下的远期利率及瞬时利率

$$d_t f(t,T) = \sigma(t,T)d\widetilde{W}_t - \sigma(t,T)\Sigma(t,T)dt,$$

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)d\widetilde{W}_s - \int_0^t \sigma(s,t)\Sigma(s,t)ds.$$

像债券价格一样，上述表示中并不依赖于漂移，只依赖于波动率σ和Σ.

5.3.7 模型中的条件

到目前为止，我们已经阐明了一些技术性条件，总结如下表.

第一个条件为充要条件，使得存在一等价测度，在该测度下每一贴现债券为一鞅，从而保证了该模型无套利．第二个条件等价于测度变换的惟一性，其意味着利用鞅表示定理可以对所有的风险进行套期保值．后面两个条件为保证可应用C-M-G定理使得在新的测度下Z为一鞅的技术性条件.

148

单因子 HJM 模型：市场完备性条件

必须满足以下条件：

- 存在一$\mathcal{F}$-可料过程γ_t，使得
$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)(\gamma_t - \Sigma(t,T)),\ \forall t \leq T.$$
- 对每一到期日T，对几乎所有的(t,ω)，$t<T$，过程$A_t=\Sigma(t,T)$不为零.
- 期望$\mathbb{E}\exp \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt < \infty$.
- 期望$\mathbb{E}\exp \frac{1}{2}\int_0^T (\gamma_t - \Sigma(t,T))^2 dt < \infty$.

方框中第一个条件的重要性在于它约束了漂移$\alpha(t,T)$的取值，因为过程γ_t仅仅为时间而不是到期日的函数，漂移被迫取值于$-\sigma(t,T)\Sigma(t,T)$及1-维修正项$\gamma_t\sigma(t,T)$之和．由于$\sigma(t,T)$及$\Sigma(t,T)$由远期利率的波动率所决定，漂移的惟一的自由度来自单参数过程γ_t．与简单资产模型不同，不是所有的漂移函数$\alpha(t,T)$都满足我们的要求.

5.4 短期利率模型

在市场中短期利率模型非常普遍．特别是，常常用短期利率模型对只依赖于一个标的债券的衍生证券定价．这些模型经历了不同的历史发展阶段——一些由离散模型，另外一

些由均衡模型发展而来．它们通常以简单的层次表出，没有一个模型明显地贯穿始终．

然而，所有的模型都为 HJM 类型，这也是我们为什么一开始就介绍这一模型的原因．而且，在短期利率模型与 HJM 模型之间存在数学变换使得这两者等价．这一节就来说明这一点．

[149] 在短期利率模型中假定了风险中性测度$\mathbb{Q}$及短期利率过程 r_t 的存在性．在该模型中，在无穷小时间区间中瞬时借款以利率 r_t 发生．如在 HJM 模型中一样，连续时间现金债券过程为 $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right)$．与 5.3 节末尾一样，债券价格为

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right)\Big|\mathcal{F}_t\right),$$

到期日为 T 的权益 X 在 t 时的价值为

$$V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right)X\Big|\mathcal{F}_t\right).$$

短期利率模型是参数化过程族的一个例子，是典型的马氏过程．可以选取参数与市场相吻合，那么就可以用以上 V_t 的表达式来对权益 X 定价．

5.4.1　以短期利率表示的 HJM 模型

我们不能立刻判断这就是 HJM 模型．为了证明这一点，需要选择远期波动率曲面 $\sigma(t,T)$，使得由 HJM 模型导出的短期利率与原来的过程 r_t 相一致．对任何一般的短期利率 r_t，这都是可行的，但如果 r_t 为马氏过程的特殊情形，则最容易做到．

假定 r_t 为一马氏扩散过程（并不一定是时齐的，具有波动率 $\rho(r_t,t)$ 及漂移 $v(r_t,t)$．即

$$\mathrm{d}r_t = \rho(r_t,t)\mathrm{d}W_t + v(r_t,t)\mathrm{d}t,$$

其中，$\rho(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 为空间 x 与时间 t 的确定性函数．

则 $\int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u = -\log P(t,T) = g(r_t,t,T)$，其中 $g(x,t,T)$ 为确定性函数

$$g(x,t,T) = -\log\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right)\Big|r_t = x\right).$$

从而有定理：

以 HJM 形式表示的短期利率模型

所需的波动率结构为

$$\sigma(t,T) = \rho(r_t,t)\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T}(r_t,t,T),$$

[150] 及

$$\Sigma(t,T) = -\rho(r_t,t)\frac{\partial g}{\partial x}(r_t,t,T).$$

下面大概解释一下上述定理．以 $\frac{\partial g}{\partial T}(r_t,t,T)$ 表示远期利率 $f(t,T)$，由 Itô 公式得：

$$d_t f(t,T) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial T}(\rho(r_t,t)\mathrm{d}W_t + v(r_t,t)\mathrm{d}t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial T}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial T}\rho^2(r_t,t)\mathrm{d}t.$$

则为得到我们的结果，波动率必为 $\sigma(t,T)$. 另外，初始的远期利率曲线 $f(0,T)$ 为：

$$f(0,T) = \frac{\partial g}{\partial T}(r_0,0,T).$$

该波动率结构及初始的远期利率曲线决定了，这个市场的 HJM 模型与 $\mathbb{Q}$ 下的短期利率相同.

5.4.2 以 HJM 模型表示的短期利率

相反，HJM 模型也是短期利率模型，以 r_t 表示的债券价格方程式成立（参看 5.3 节的末尾)，以 HJM 波动率 $\sigma(t,T)$ 及 $\Sigma(t,T)$ 表示的 r_t 为

$$r_t = f(0,t) + \int_0^t \sigma(s,t)\mathrm{d}W_s - \int_0^t \sigma(s,t)\Sigma(s,t)\mathrm{d}s.$$

该公式比较复杂.

5.4.3 Ho-Lee 模型

现考虑可以接受的短期利率的层次模型，该模型首次由 Ho 和 Lee 创立. Ho-Lee 给出了在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下 r_t 的随机微分方程，表示如下：

Ho-Lee 模型

短期利率由下述 SDE 给出：

$$\mathrm{d}r_t = \sigma \mathrm{d}W_t + \theta_t \mathrm{d}t,$$

其中，θ_t 为某个确定性且有界的函数，σ 为常数.

151

接下来的问题是，该模型所对应的 HJM 形式如何？由前面介绍的方法，我们发现由 Itô 公式得：

$$g(x,t,T) = x(T-t) - \frac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 + \int_t^T (T-s)\theta_s \mathrm{d}s.$$

这样，HJM 波动率曲面 $\sigma(t,T)$ 为简单的 $\sigma\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial T} = \sigma$. 从而波动率曲面为常数，既不依赖于时间也不依赖于到期日. 下面就给出在 $\mathbb{Q}$ 下的所对应的 HJM 模型：

以 HJM 表示的 Ho-Lee 模型

$$d_t f(t,T) = \sigma \mathrm{d}W_t + \sigma^2(T-t)\mathrm{d}t,$$

以及

$$f(0,T) = \frac{\partial g}{\partial T}(r_0,0,T) = r_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 + \int_0^T \theta_s \mathrm{d}s.$$

等价地，我们可以得到债券价格 $P(t,T)$ 在 $\mathbb{Q}$ 下为

$$P(t,T)=\exp\left(-\left(\sigma(T-t)W_t+\int_t^T f(0,u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\sigma^2T(T-t)t\right)\right).$$

该模型为一般的具有常数波动率的单因子模型，实际上就是5.2节中的简单模型．如果以短期利率表示，则 σ 为所有远期利率的波动率，使得 θ_t 通过等式 $f(0,T)=r_0-\frac{1}{2}\sigma^2T^2+\int_0^T\theta_s\mathrm{d}s$ 与任何初始远期利率曲线相吻合．

这是一个简单的模型，人们对它的简单性持有否定态度，因为远期利率与短期利率 r_t 可能为负，并且长期可能趋向于无穷大．不仅仅在$\mathbb{Q}$下如此，在任何等价测度$\mathbb{P}$下也如此．许多其他模型努力克服这些缺点．

然而，它又不是如此的简单——HJM表述反映了真实的远期利率随时间的波动行为．给定任何可料过程 r_t，远期利率可以按以下方式波动：

$$\mathrm{d}_tf(t,T)=\sigma\mathrm{d}W_t+(\sigma^2(T-t)+\sigma\gamma_t)\mathrm{d}t,$$

[152]

$$\mathrm{d}r_t=\sigma\mathrm{d}W_t+(\theta_t+\sigma r_t)\mathrm{d}t.$$

因此，短期利率在现实世界的测度$\mathbb{P}$下的漂移可取值范围较宽广，而非简单的确定性漂移 θ_t．Ho-Lee模型的局限性不在于漂移而在于 $\sigma(t,T)=\sigma$ 为常数．

需要特别指出两点．首先，债券价格和现金债券价格都服从对数正态分布，因此，Black-Scholes公式仍然成立（如在4.1节暗示的及6.2节证明的）．

其次，对确定性的短期利率波动率模型

$$\mathrm{d}r_t=\sigma_t\mathrm{d}W_t+\theta_t\mathrm{d}t,$$

所对应的HJM表述为

$$\mathrm{d}_tf(t,T)=\sigma_t\mathrm{d}W_t+\sigma_t^{\,2}(T-t)\mathrm{d}t,$$

初始的远期利率曲线为

$$f(0,T)=r_0-\int_0^T\sigma_s^2(T-s)\mathrm{d}s+\int_0^T\theta_s\mathrm{d}s.$$

这里，额外的自由度是允许波动率曲面依赖于时间，但不依赖于到期日．对此，我们需要别的模型．

5.4.4　Vasicek / Hull-White 模型

下面在可接受的框架下允许短期利率的漂移依赖于利率的当前值．

Vasicek 模型

在$\mathbb{Q}$下的短期利率为

$$\mathrm{d}r_t=\sigma\mathrm{d}W_t+(\theta-\alpha r_t)\mathrm{d}t,$$

其中，α，θ 和 σ 均为常数．

上述 SDE 由 Brown 运动部分及均值回归漂移部分组成．该漂移使得当利率低于 θ/α 时就向上运动，当高于 θ/α 时就向下运动．漂移的大小与利率偏移平均值的距离成比例．称这样的过程为 Ornstein-Uhlenbeck 过程或 O-U 过程．如图 5-7 为 $\sigma=2\theta=2\alpha=1$ 时的 O-U 过程．

153

设 r_t 的初始值为 r_0，由 Itô 公式解得 r_t 为

$$r_t = \theta/\alpha + e^{-\alpha t}(r_0 - \theta/\alpha) + \sigma e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\mathrm{d}W_s .$$

可以用不同的$\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\bar{W}$ 来重新表示 r_t 为

$$r_t = \theta/\alpha + e^{-\alpha t}(r_0 - \theta/\alpha) + \sigma e^{-\alpha t}\bar{W}\left(\frac{e^{2\alpha t}-1}{2\alpha}\right),$$

因此，r_t 服从正态边际分布，期望为 $\theta/\alpha + \exp(-\alpha t)(r_0 - \frac{\theta}{\alpha})$，方差为 $\sigma^2(1-\exp(-2\alpha t))/2\alpha$．当 t 越来越大时，r_t 依分布收敛于期望为 θ/α，方差为 $\sigma^2/2\alpha$ 的正态分布．注意：仅仅是依分布收敛，并不是过程 r_t 收敛．

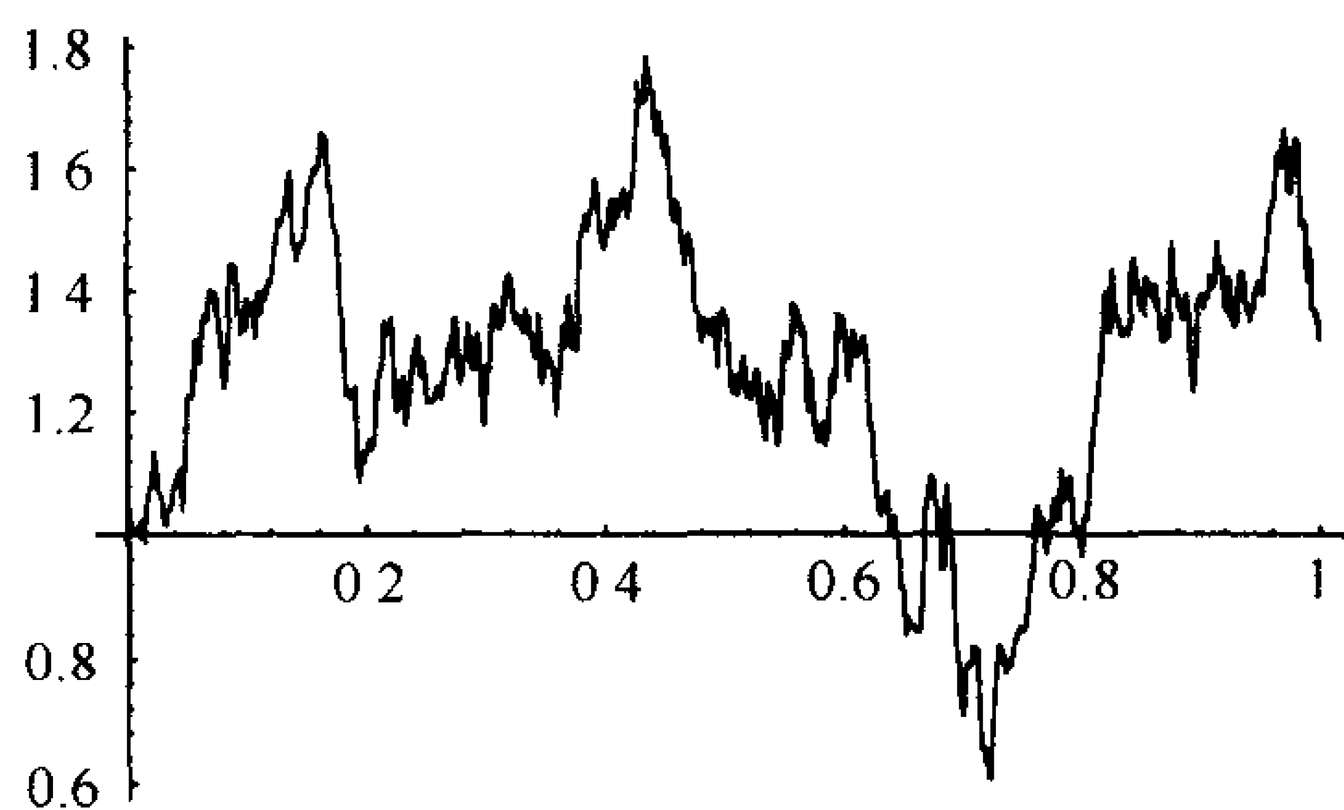


图 5-7 当 $\sigma=2\theta=2\alpha=1$ 时的 O-U 过程

该模型对应的 HJM 的形式如何？再一次由 Itô 公式，可找到 $g(x,t,T)$，进而得到 $\sigma(t,T)$ 及 $f(0,T)$．有以下结果：

用 HJM 形式表示的 Vasicek 模型

$$\sigma(t,T) = \sigma\exp(-\alpha(T-t)),$$

及

$$f(0,T) = \theta/\alpha + e^{-\alpha T}(r_0 - \theta/\alpha) - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}(1-e^{-\alpha T})^2.$$

现在我们可以看出该模型优于 Ho-Lee 模型之处，Ho-Lee 模型没有把到期日引入波动率曲面，而 Vasicek 模型引入了．因此，该模型可以由丰富的可观察到的波动率数据进行校准．注意波动率 $\sigma(t,T)$ 在$\mathbb{Q}$ 下是如何由短期利率的漂移和波动导出的．为了描绘 HJM 模型，需要两个自由度刻画波动——一个是时间，另一个是到期日．短期利率模型并不是不涉及第二个自由度，该模型将它隐含在波动率 $\rho(r_t,t)$ 与漂移 $v(r_t,t)$ 的关系中了．在$\mathbb{Q}$ 下，r_t 的漂移为一个关键的变量．

154

但只有在$\mathbb{Q}$下，Vasicek 模型为$\mathbb{Q}$下向均值回归的，这一点与 Ho-Lee 模型不同．其实，两个模型在$\mathbb{P}$下都是向均值回归的．有一点我们必须注意到——额外参数 α 的引入，使得 Vasicek 拥有比 Ho-Lee 模型更丰富的可允许的$\mathbb{P}$-漂移集，但该集合涉及到了到期日．对时间的依赖性一般并不能预先判断出一个优于另一个．因为有可能找到一测度改变 γ_t，使得 Ho-Lee 模型是向均值回归的．如果在现实世界中可观察到向均值回归，并不是非得选 Vasicek 模型．在实际中，是整条曲线的波动率而不是短期利率的漂移在使得一个模型优于另一个模型方面起关键作用．

如先前一样，可以自然地将 Vasicek 模型推广到

$$dr_t = \sigma_t dW_t + (\theta_t - \alpha_t r_t)dt,$$

其中，σ_t，θ_t 和 α_t 为时间的确定性函数．因为 r_t 仍为具有正态边际分布的 Gauss 过程，所以$f(t,T)$也为 Gauss 的，且债券价格服从对数正态边际分布．在此情况下，HJM 波动率和初始的远期利率曲线为：

$$\begin{cases} \sigma(t,T) = \sigma_t\beta(t,T)，其中\beta(t,T) = \exp\left(-\int_s^T \alpha_s ds\right), \\ f(0,T) = r_0\beta(0,T) + \int_0^T \theta_s \beta(s,T)ds - \int_0^T \sigma_s^2\beta(s,T)\left(\int_s^T \beta(s,u)du\right)ds. \end{cases}$$

远期利率$f(t,T)$的正态性有其优缺点．优点在于债券价格 $P(t,T)$为对数正态分布的，使得6.2节中有关对数正态的期权定价结果仍成立；缺点在于，瞬时利率和远期利率可能为负．下一模型弥补了这一不足，我们通过选取适当的参数，可以杜绝这一情况的发生．

155

5.4.5　Cox-Ingersoll-Ross 模型

该模型为均值回归的，因而使得它永远保持正值而不能为零（见方框）．

Cox-Ingersoll-Ross 模型

在$\mathbb{Q}$下，瞬时利率的 SDE 为

$$dr_t = \sigma_t \sqrt{r_t}dW_t + (\theta_t - \alpha_t r_t)dt,$$

其中，σ_t，θ_t 和 α_t 为时间的确定性函数．

漂移项为回归力始终指向当前的平均值 θ_t/α_t，当 r_t 与0越接近时，波动率越小，使得漂移 θ_t 可以控制 r_t 并阻止 r_t 不为负．

只要 θ 满足 $\theta_t \geqslant \frac{1}{2}\sigma_t^2$，则过程永远严格为正．

称该过程为自回归（autoregressive）过程．图5-8为 $\sigma=1$，$\theta=2$，$\alpha=2$ 时自回归过程．

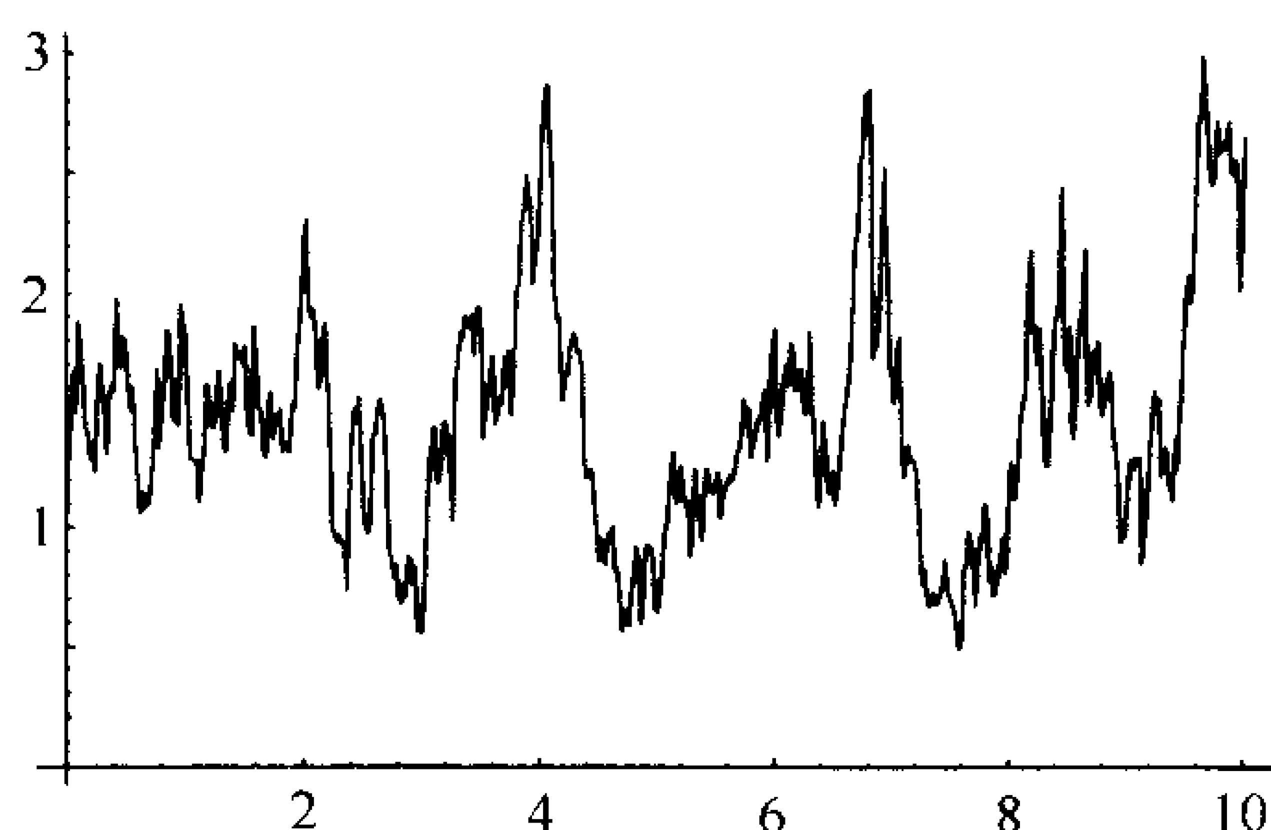


图5-8 当$\sigma=1$，$\theta=2$，$\alpha=2$时的自回归过程

对于r_t，很难找到其解析轨道解，但可以通过解一个有用的偏微分方程（PDE）得到债券价格．为此首先定义$B(t,T)$为下述 Riccati 微分方程的解：

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{1}{2}\sigma_t^2B^2(t,T)+\alpha_tB(t,T)-1,\ B(T,T)=0.$$

156

（一般地说，该方程无解析解，但对它的数值解法已有很好的研究．）函数$g(x,t,T)=-\log P(t,T)\mid r_t=x$，可用$B(t,T)$表示为

$$g(x,t,T)=xB(t,T)+\int_t^T\theta_sB(s,T)\mathrm{d}s.$$

令$D(t,T)=\frac{\partial B}{\partial T}(t,T)$，波动率结构可表为：

由 HJM 表示的 Cox-Ingersoll-Ross 模型

$$\sigma(t,T)=\sigma_t\sqrt{r_t}D(t,T),$$

$$\Sigma(t,T)=-\sigma_t\sqrt{r_t}B(t,T),$$

及

$$f(0,T)=r_0D(0,T)+\int_0^T\theta_sD(s,T)\mathrm{d}s.$$

与以往一样，债券价格$P(t,T)$有形式$P(t,T)=\exp(-g(r_t,t,T))$.

5.4.6 Black-Karasinski 模型

解决短期利率取正值的问题的另一方法就是取指数．该模型为 Black-Derman-Toy 模型的推广．令X_t表示 Vasicek 模型中的一般的 O-U 过程，严格地说：

Black-Karasinski 模型

令过程X_t满足

$$\mathrm{d}X_t=\sigma_t\mathrm{d}W_t+(\theta_t-\alpha_tX_t)\mathrm{d}t,$$

其中，σ_t，θ_t和α_t为时间的确定性函数．则瞬时利率r_t为$r_t=\exp(X_t)$.

因此，利率漂移的对数朝着当前平均值θ_t/α_t运动，利率本身也朝着平均值漂移，且总

157

是为正．由于 X_t 服从正态分布的，所以 r_t 服从对数正态分布．然而，$\int_t^T r_s \mathrm{d}s$ 没有解析表达式．该模型仍有 HJM 相应形式，即存在波动率曲面 $\sigma(t,T)$ 及对应的单因子 HJM 模型，使得由 HJM 模型产生的瞬时利率与原来给定的相同．

5.5　多因子 HJM 模型

单因子模型的缺点在于债券价格的所有增量都是完全相关的．对于许多应用来说，该假设太粗糙了，特别是如果我们想要对依赖于收益曲线上的两点之差的衍生证券定价时更是如此．

多因子模型涉及到由一族独立的 Brown 运动驱动的各种各样的过程，在 6.3 节中将更详细地讨论这种模型．在 n 因子模型中，有 n 个 Brown 运动 $W_1(t),\ldots,W_n(t)$．每一个 T-债券远期利率过程都有一个对应每个 Brown 运动 $W_i(t)$ 的波动率 $\sigma_i(t,T)$．从而，允许不同的债券以不同的方式依赖于外部的“干扰”，并且与其他某些债券相关性强一些，与某些债券相关性弱一些．多因子 HJM 模型的一般形式为

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s,T)\mathrm{d}W_i(s) + \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

该式表明远期利率过程的初始值为 $f(0,T)$，由多个 Brown 运动驱动且有漂移．可以看出，$f(t,T)$ 的瞬时平方波动率以及两个远期利率 $f(t,T)$ 和 $f(t,S)$ 的增量的协方差分别为

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2(t,T) \qquad 和 \qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\sigma_i(t,S).$$

[158] 对单因子模型，即 $n=1$，T-债券和 S-债券对应的远期利率的增量的相关系数为 1.

类似以前，可把瞬时利率 $r_t = f(t,t)$ 写为

$$r_t = f(0,t) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \sigma_i(s,t)\mathrm{d}W_i(s) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s.$$

其中，波动率和漂移条件也推广为：

多因子 HJM 模型：波动率和漂移的条件

假定

- 对每一 T，过程 $\sigma_i(t,T)$ 及 $\alpha(t,T)$ 为$\mathcal{F}$-可料的且它们的积分 $\int_0^T \sigma_i^2(t,T)$ 及 $\int_0^T \left|\alpha(t,T)\right|$ 均为有限的．
- 初始的远期曲线 $f(0,T)$ 为确定性的，且满足条件 $\int_0^T \left|f(0,u)\right|\mathrm{d}u < \infty$．

- 漂移 α 有有限积分，即 $\int_0^T\int_0^u |\alpha(t,u)|\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u < \infty$.
- 每一波动率 σ_i 有有限期望，即 $\mathbb{E}\int_0^T\left|\int_0^u \sigma_i(t,u)\mathrm{d}W_i(t)\right|\mathrm{d}u < \infty$.

为了使贴现债券价格为鞅，需要多维情形下的 Cameron-Martin-Girsanov 定理（见 6.3 节）. 下列两个方框中给出所需要的条件. 其中，$\Sigma_i(t,T)$ 为积分 $-\int_t^T \sigma_i(t,u)\mathrm{d}u$.

多因子 HJM 模型：市场完备性条件（1）

- 对 $1\leqslant i\leqslant n$，存在可料过程 $\gamma_i(t)$，使得 $\alpha(t,T)=\sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T)(\gamma_i(t)-\sum_i(t,T))$，对所有 $t\leqslant T$.
- 期望 $\mathbb{E}\exp\frac{1}{2}\Sigma_i^n\int_0^T\gamma_i^2(t)\mathrm{d}t < \infty$.

159

除了一点差异之外，多因子模型与单因子相同. 在多因子模型中，漂移可以与它的风险中性值相差 n 维的自由度. 即是说，作为 T 的函数，$\alpha(t,\cdot)$ 可以与风险中性值相差 $\sigma_i(t,\cdot)$ 的线形组合. 这样，多因子情形所对应的漂移函数集虽然比所有可能的漂移函数集小得多，但比单因子情形大得多. 第二个条件是 C-M-G 定理所需的技术性条件，保证在等价测度变换下 $\gamma_i(t)$ 为漂移.

多因子 HJM 模型：市场完备性条件（2）

我们需要以下条件：

- 对几乎所有的 (t,ω)，$t<T_1$ 和每个到期日集 $T_1<T_2<\cdots<T_n$，矩阵 $A_t=(\Sigma_i(t,T_j)_{i,j=1}^n)$ 为非奇异的.
- 期望 $\mathbb{E}\exp\frac{1}{2}\Sigma_i^n\int_0^T(\gamma_i(t)-\Sigma_i(t,T))^2\mathrm{d}t < \infty$.

单因子情形需要波动率过程 A_t 不为零，多因子情形要求波动率矩阵过程为非奇异的. 第二个条件保证了无漂移的贴现债券价格事实上为一个鞅（多维指数鞅）.

如前所述，债券价格本身有随机增量

$$\mathrm{d}_tP(t,T)=P(t,T)\Big(\sum_{i=1}^n\Sigma_i(t,T)\mathrm{d}W_i(t)\ \ldots\ +\Big(r_t-\int_t^T\big(\alpha(t,u)+\sum_{i=1}^n\sigma_i(t,u)\Sigma_i(t,u)\big)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}t\Big),$$

其中，$\Sigma_i(t,T)$ 为积分 $-\int_t^T\sigma_i(t,u)\mathrm{d}u$. 贴现债券价格 $Z(t,T)=B_t^{-1}P(t,T)$ 满足

$$\mathrm{d}_tZ(t,T)=Z(t,T)\Big(\sum_{i=1}^n\Sigma_i(t,T)\mathrm{d}W_i(t)-\Big(\int_t^T\big(\alpha(t,u)+\Sigma_i\sigma_i(t,u)\Sigma_i(t,u)\big)\mathrm{d}u\Big)\mathrm{d}t\Big).$$

160

由上式得 Z 的 SDE 为

$$d_t Z(t,T) = Z(t,T)\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)(dW_i(t) + \gamma_i(t)dt).$$

使用多维的 C-M-G 定理，可以找到测度$\mathbb{Q}$与$\mathbb{P}$等价，使得在$\mathbb{Q}$下，$\widetilde{W}_1,\ldots,\widetilde{W}_n$ 为独立的$\mathbb{Q}$-Brown 运动，其中，$\widetilde{W}_i(t) = \widetilde{W}_i(t) + \int_0^t \gamma_i(s)ds$. 因此，在$\mathbb{Q}$下 Z 的 SDE 为

$$d_t Z(t,T) = Z(t,T)\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)d\widetilde{W}_i(t),$$

从而，每个 $Z(t,T)$ 关于 t 为$\mathbb{Q}$-鞅.

在该鞅测度$\mathbb{Q}$下，债券价格 P 及远期利率 f 有随机微分：

$\mathbb{Q}$ 下的债券价格和远期利率

$$d_t P(t,T) = P(t,T)\left(\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)d\widetilde{W}_i(t) + r_t dt\right),$$

$$d_t f(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)d\widetilde{W}_i(t) - \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)\Sigma_i(t,T)dt.$$

衍生证券定价和套期保值

衍生证券的价格仍有我们所熟悉的形式：

期权定价公式（HJM）

如果 X 为衍生证券在 T 时的支付，则它在 t 时的价值为

$$V_t = B_t\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)X \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right).$$

[161] 我们需要多维的鞅表示定理，表述如下：

鞅表示定理（n 因子）

令 $\widetilde{W}$ 为 n-维$\mathbb{Q}$-Brown 运动，假设 M_t 为 n-维$\mathbb{Q}$-鞅过程，$M_t = (M_1(t),\ldots M_n(t))$ 它的波动率矩阵为 $(\sigma_{ij}(t))$，即 $dM_j(t) = \sum_i \sigma_{ij}(t)d\widetilde{W}_i(t)$，且矩阵以概率 1 为非奇异的. 如果 N_t 为任意 1-维的$\mathbb{Q}$-鞅，则存在 n-维的$\mathcal{F}$-可料过程 $\phi_t = (\phi_1(t),\ldots,\phi_n(t))$，使得 $\int_0^T(\Sigma_j\sigma_{ij}(t)\phi_j(t))^2dt < \infty$，且鞅 N 可表示为

$$N_t = N_0 + \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \phi_j(s)dM_j(s).$$

进而，这样的 ϕ 为（本质上）惟一的.

通常，对 n-因子模型，需要 n 个不同资产的投资组合和 1 个现金债券对权益套期保值. HJM

的优越性在于，我们可以任意选择所喜欢的 n 个资产，所得结果总是相同的.

如果用贴现债券对权益 X 套期保值，必须确信这些债券的到期日在 T 之后. 为此，我们选择债券的到期日为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ 满足 $T < T_1 < T_2 < \ldots < T_n$.

一个自融资策略 $(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t), \psi_t)$ 是持有 n-维的到期日为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ 的债券和 ψ_t 份的现金债券 B_t 的投资组合，该投资组合在 t 时的价值为

$$V_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(t) P(t, T_j) + \psi_t B_t,$$

其贴现值 $E_t = B_t^{-1} V_t$ 为

$$E_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(t) Z(t, T_j) + \psi_t.$$

策略为自融资的当且仅当（与6.4节相同）

162

$$\mathrm{d}E_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(t) \mathrm{d}_t Z(t, T_j)$$

成立.

下面，与以往一样，对贴现权益生成的鞅即 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t)$ 应用鞅表示定理. 对应的鞅部分 $M_j(t)$ 为贴现债券 $Z(t, T_j)$，其波动率矩阵由 $A_t = (\Sigma_i(t, T_j))_{i,j}$ 给出. 由市场的完备性可知该矩阵为非奇异的. 如果令 $E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t)$，则由鞅表示定理，存在 n 维可料过程 ϕ_t 使得

$$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \phi_j(s) \mathrm{d}Z(s, T_j).$$

从而，立刻得到一自融资策略 ϕ，在 t 时刻持有 $\phi_j(t)$ 份 T_j-债券和 $\psi_t = E_t - \Sigma_j \phi_j(t) Z(t, T_j)$ 份现金债券.

如前所述，该投资组合的初始成本为 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X)$，到 T 时其值正好演化为 X.

5.6 利率产品

最近几年，利率产品的数量迅猛增加. 特别是在场外交易市场（over-the-counter markets)，不久前被当作奇异期权的产品现在已很普遍了. 虽然我们不可能一一描述成百上千的交易权益，但是可以对每一领域中基本的类型进行大概的分析.

5.6.1 远期合约

这大概是最简单的利率产品了. 在当前时刻 t，交易双方约定在将来的时刻 T_1，签约的一方支付 k 美元给另一方，在 T_2 时刻收回一美元（$T_2 > T_1$). k 应当多大呢?

由定价公式（不管在何种模型下），在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下该权益在 t 时刻的价值为

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_2}^{-1} \mid \mathcal{F}_t) - B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(kB_{T_1}^{-1} \mid \mathcal{F}_t),$$

其中，B_t 为现金债券

[163]

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s \mathrm{d}s\right).$$

回忆 $B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} \mid \mathcal{F}_t) = P(t,T)$，因此有

$$V_t = P(t,T_2) - kP(t,T_1).$$

为了使该合约的价值为零，则在 t 时刻须选择 k 为

$$k = \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)}.$$

这个价格是有意义的，表明了从 T_1 到 T_2 的远期收益为

$$-\frac{\log P(t,T_2) - \log P(t,T_1)}{T_2 - T_1}.$$

当 T_1 与 T_2 非常接近时，瞬时借款远期利率近似为

$$-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T) = f(t,T).$$

k 的表达式给出了套期保值的思路．假设在 t 时刻我们买入 k 份 T_1-债券，卖出一份 T_2-债券．该策略的初始成本为零，到 T_1 时，我们得到 k 美元（与那时所要支付的量吻合），到 T_2 时需支付1美元．从而该策略对所签订的远期合约实现了套期保值．

在这个例子中，因为套期保值策略是静态的，所得结果独立于所选择的期限结构模型．这种情况也会出现在其他重要的情形．

5.6.2　多次支付合约

大多数利率产品并不只是在 T 时刻一次支付 X 的，相反往往是在一系列时刻 $T_i(i=1,2,\ldots,n)$ 有一系列支付量 X_i．每一次支付量 X_i 可能依赖于直到支付时刻 T_i 的标的资产价格运动甚至依赖于前一次的支付．只要我们注意到这一点，在定价时就不会引起混淆，确实有两种不同的方法解决这一问题．

- **分离法**

我们可以分别对待每个 X_i，把它看作为在 T_i 支付的权益．因此在 t 时刻它的价值为

[164]

$$V_i(t) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_i}^{-1} X_i \mid \mathcal{F}_t) = P(t,T_i)\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_i}}(X \mid \mathcal{F}_t),$$

其中，$\mathbb{P}_{T_i}$ 为 T_i 远期测度（见6.4节），该方法总是可行的．只是对每一 i，都要改变一次远期测度．

- **储蓄账户法**

与上一方法相反，我们可以将在 T_i 得到的支付 X_i 储蓄起来，直到最后时刻 T，即在 T_i

时刻用得到的 X_i 买一 T-债券（或投资银行存款账户 B_t 直到 T 时刻）. 则到 T 时所得的支付为

$$X = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{P(T_i, T)}.$$

X 在 t 时的价值为

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t) = P(t,T)\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}(X \mid \mathcal{F}_t).$$

5.6.3 附息债券

实践中，纯粹的零息贴现债券并不多见，特别是长期债券. 相反，一债券不仅仅在到期日要支付其面值，而且要定期支付小额固定的 c 美元的息票直到到期日为止.

假设一债券有 n 次定期付息，设在时刻 $T_i = T_0 + i\delta(i = 1, ..., n)$ 所支付的息票率为 k，在 T_n 时刻另外再支付 1 美元的面值，在 T_i 时刻实际的息票为 $k\delta$，其中 δ 为两次支付的间隔时间. 该合约的现金流相当于拥有一份 T_n-债券以及 $k\delta$ 份 T_i-债券. 该附息债券在 T_0 时刻的价格为

$$P(T_0, T_n) + k\delta \sum_{i=1}^{n} P(T_0, T_i).$$

如果我们定价该债券在初始时刻（T_0）的值为其面值 1 美元，则息票率应为

$$k = \frac{1 - P(T_0, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^{n} P(T_0, T_i)}.$$

165

5.6.4 浮动利率债券

一债券可能支付非固定的息票，而是依赖于当前的利率. 一个有趣的例子是在时刻 S 与时刻 T 之间的利息与在 S 时刻所买的 T-债券的收益一样.

假设一债券在 T_n 时刻支付美元本金，在 $T_i = T_0 + i\delta(i = 1, \cdots, n)$ 时刻支付各种不同量的息票. 在 T_i 所支付的息票由 T_{i-1}时刻的 LIBOR 利率

$$L(T_{i-1}) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1\right)$$

决定. 在 T_i 的实际支付为 $\delta L(T_{i-1}) = P(T_{i-1}, T_i)^{-1} - 1$，该数量等于我们在时刻 T_{i-1} 所买的价值 1 美元的 T_i-债券的利息.

T_i 时刻所支付的量在 T_0 的价值为

$$B_{T_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(B_{T_i}^{-1}(P^{-1}(T_{i-1}, T_i) - 1) \mid \mathcal{F}_{T_0}\right).$$

由于条件期望$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_i}^{-1} \mid \mathcal{F}_{T_{i-1}}) = B_{T_{i-1}}^{-1} P(T_{i-1}, T_i)$，并且债券价格 $P(T_{i-1}, T_i)$ 关于$\mathcal{F}_{T_{i-1}}$信息为已知的. 两边同除以 $P(T_{i-1}, T_i)$ 得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(B_{T_i}^{-1} P^{-1}(T_{i-1}, T_i) \mid F_{T_{i-1}}\right) = B_{T_{i-1}}^{-1}.$$

由塔式定律，可将 T_i 时的支付量在 T_0 的价值重写为

$$B_{T_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_{i-1}}^{-1}-B_{T_i}^{-1}\mid\mathcal{F}_{T_0})$$

该表达式建议我们 T_0 时刻采用以下策略进行套期保值：卖出 T_i-债券，买入 T_{i-1}- 债券，当 T_{i-1}- 债券到期时，再买 $P^{-1}(T_{i-1},T_i)$ 份 T_i-债券，到 T_i 时，该投资组合的价值为 $P^{-1}(T_{i-1},T_i)-1$，这正是我们所需的支付量．

该可变附息债券的总价值就等于它各部分的和，即

166

$$V_0=P(T_0,T_n)+\sum_{i=1}^{n}(P(T_0,T_{i-1})-P(T_0,T_i))=1.$$

令人惊讶的是，该债券有等于其本金面值的固定价格．为什么会这样呢？因为这种债券等价于以下一系列简单的交易行为所构成的投资组合：

- T_0 时花费1美元买一份 T_1-债券并持有．
- T_1 时取出债券的利息作为息票，用1美元本金买一份 T_2-债券．
- 重复以上步骤，直到在 T_n 时刻仍有1美元的本金．

以上投资组合与付息债券的现金流完全相同，因此也应有相同的初始价格．

5.6.5　互换

该类很普遍的合约是以一系列变化的支付量交换一系列固定的支付量（反之亦然）．即我们以浮动利率换取固定利率．

典型地，双方约定一方定期地收到一系列固定的量，并且在每一支付日期，支付一系列依赖于当时利率变化的量．在实践中，仅仅交换两者之间的净差，如下面的图5-9所示．

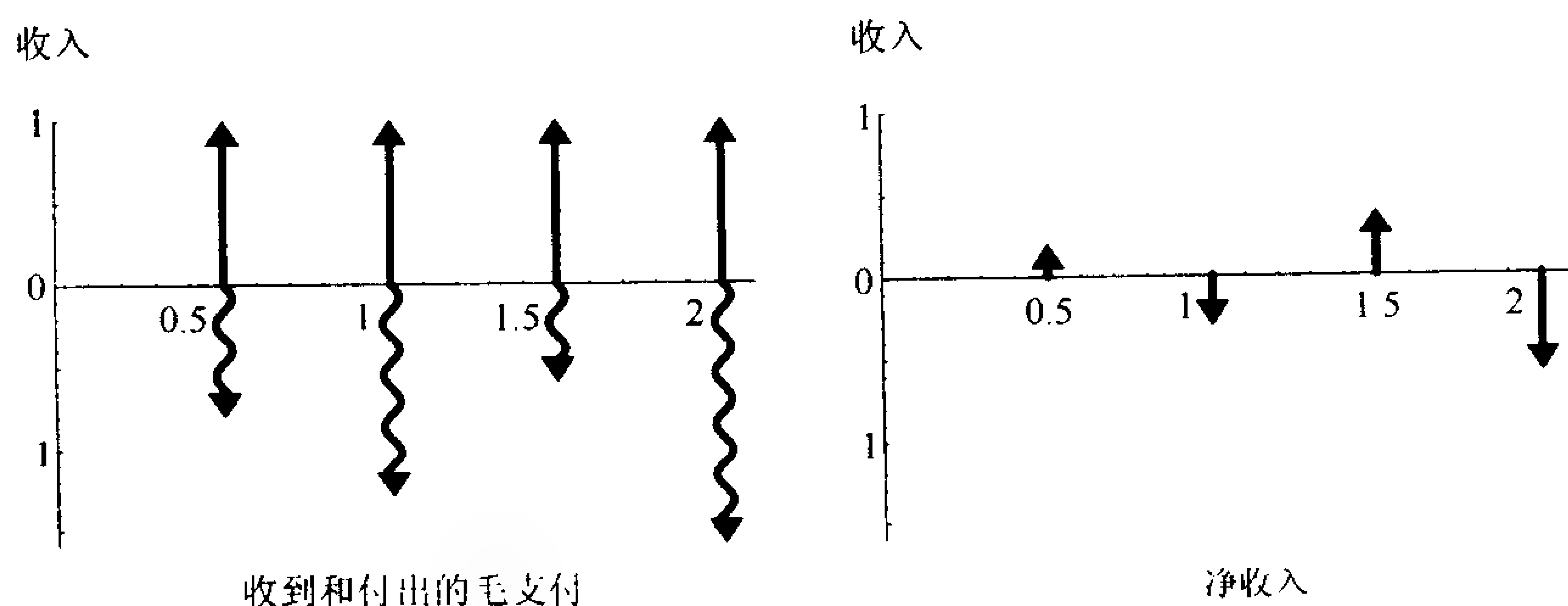


图 5-9

可变支付的标准定义为债券支付前一时间区间的利息．如果支付日期为 $T_i=T_0+i\delta$（$i=1,\cdots,n$），则第 i 个支付量由 T_{i-1}时刻开始的 δ 区间的 LIBOR 利率决定．支付量为

167

$$\delta L(T_{i-1})=\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)}-1.$$

假设互换约定在每一时间区间支付固定比例 k，则该互换看起来就像一投资组合，持有一固定的附息债券并卖空一可变的附息债券．前者的价值为

$$P(T_0,T_n)+k\delta\sum_{i=1}^{n}P(T_0,T_i),$$

后者的成本为 1 美元．为了使得该互换的初始值为零，则固定利率必为

$$k=\frac{1-P(T_0,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^{n}P(T_0,T_i)}.$$

5.6.6 远期互换

在一远期互换合约中，以比例 k 收到固定支付，从时刻 T_0 开始，在 $T_i=T_0+i\delta$ $(i=1, \cdots, n)$ 支付．该互换在 T_0 的价值为

$$X=P(T_0,T_n)+k\delta\sum_{i=1}^{n}P(T_0,T_i)-1.$$

在 T_0 之前的时刻 t，X 的现值为

$$V_t=B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_0}^{-1}X\mid\mathcal{F}_t)=P(t,T_n)+k\delta\sum_{i=1}^{n}P(t,T_i)-P(t,T_0).$$

为了使远期互换合约在 t 时刻的值为零，则固定比例 k 为

$$k=\frac{P(t,T_0)-P(t,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^{n}P(t,T_i)},$$

称该比例 k 为远期互换率（forward swap rate）．上述 k 又可以表示为

$$k=\frac{1-F_t(T_0,T_n)}{\delta\sum_{i=1}^{n}F_t(T_0,T_i)},$$

其中 $F_t(T_0,T_i)$ 为 t 时刻约定在 T_0 购买 T_i-债券的远期价格，即 $F_t(T_0,T_i)=\dfrac{P(t,T_i)}{P(t,T_0)}$．以这种形式表示的 k 很像瞬时的互换率．

168

5.6.7 债券期权

就像股票期权一样，一债券期权为在将来特定的日期以敲定的价格购买一债券的权力．敲定价为 k，执行时间为 t 的 T-债券期权在零时刻的价值为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_t^{-1}(P(t,T)-k)^{+}),$$

其中，$\mathbb{Q}$ 为鞅测度．

在 Ho-Lee 模型下，远期利率的运动变化为

$$d_t f(t,T) = \sigma dW_t + \sigma^2(T-t)dt,$$

远期利率与瞬时利率都服从正态分布，从而 T-债券与贴现债券服从对数正态分布，因此可以利用6.2节关于对数正态分布的一系列结果对该期权定价．期权价格为

$$V_0 = P(0,t)\left(F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 t}{\bar{\sigma}\sqrt{t}}\right)\right),$$

其中，F 为 $P(t,T)$ 的当前的远期价格，即 $F=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}$，期限波动率（term volatility）$\bar{\sigma}$ 为 σ（$T-t$）（即 $\bar{\sigma}^2 t$ 为 $P(t,T)$ 的对数方差）. 在 Vasicek 模型（为最一般的单因子模型，债券价格为对数正态分布）下，上式也成立，具有相同的远期价格，但不同之处在于 $\bar{\sigma}$ 依赖于模型中的确定性函数 σ_t 及 ϕ_t.

再来看看波动率为 σ、敲定价为 k 及执行时间为 t 的股票期权的定价公式．其价值为

$$V_0 = e^{-rt}\left(F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right),$$

其中，r 为常数利率，F 为股票当前的远期价格，即 $F=e^{rt}S_0$，σ 为 S_t 的（期限）波动率.

我们看到债券期权定价公式仅仅改变了贴现因子，该贴现因子表示将来（t 时刻）的1美元在现在（0时刻）的价值．当利率为常数时，该贴现因子为 e^{rt}，在变利率下，它为 t-债券的价格 $P(0,t)$．否则，只要其他变量以远期价格和期限波动率表示时，公式形式就不变.

169

5.6.8　附息债券期权

考虑一债券，在时刻 $T_i=T_0+i\delta(i=1,\cdots,n)$ 支付的息票率为 k，T_n 时再额外偿还1美元．我们可以在时刻 T_n 之前买卖该债券，将来的（不是过去的）息票也随之转移．像以往一样，该债券在 t 时的价值为

$$C_t = P(t,T_n) + k\delta\sum_{i=I(t)}^{n} P(t,T_i),$$

其中，$I(t)=\min\{i: t<T_i\}$ 表示 t 之后首次付息时刻所对应的序列数（在所有付息日之中）.

假设有一个在 t 时刻购买一敲定价为 k 的债券的期权，一般来说，不容易得到该期权定价的解析解．然而，在特别情形下，即在单因子情形下短期利率为马氏过程时，可以用 Jamshidian 的方法容易地对这样的期权定价.

每一债券价格 $P(t,T)$ 可以看作时间、到期日及即期利率的确定性函数 $P(t,T;r_t)$. 另外，该函数为 r_t 的减函数——当利率上升，债券价格下跌．持有债券的投资组合与债券有相同的表现，因此 C_t 也为 r_t 的减函数 $C(t,r_t)$.

这样，存在 r 的某个临界值 r^* 使得 $C(t,r^*)$ 就等于 K. 令 K_i 为 $P(t,T_i;r^*)$，则 r^* 也是

标的物为 T_i-债券、敲定价为 K_i 的期权的临界值．这意味着 C_t 比 K 大当且仅当任何（每一个）都 $P(t,T_i)$ 比 K_i 大．因此便有

$$(C_t - K)^+ = (P(t,T_n) - K_n)^+ + k\delta \sum_{i=I(t)}^{n} (P(t,T_i) - K_i)^+.$$

换句话说，该投资组合的期权为期权的投资组合．因此，可以用已有的零息债券期权公式对每一个附息债券期权定价．

5.6.9 利率上限与利率下限

假设我们准备以浮动利率借款，为了防止利率会升高得太高可以采取以下措施．如果在时刻 $T_i = T_0 + i\delta(i = 1,\cdots,n)$ 支付，在 T_i 时刻以 T_{i-1}时刻确定的 LIBOR 利率支付 δ-区间的利息

$$L(T_{i-1}) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)} - 1\right).$$

170

为了保证所支付的利率永远不高于某个利率水平 k，那么所需要的代价为多少？这样的利率上限（cap）合约在每个时刻 T_i 支付我们的是 LIBOR 和利率上限的差额：

$$\delta(L(T_{i-1}) - k)^+.$$

在特定时刻 T_i 的收益称为单期利率上限（Caplet），如果能够对单期利率上限定价，便可以对利率上限定价了．

可以把单期利率上限权益重写为

$$X = (1 + k\delta)P_i^{-1}(K - P_i)^+,$$

其中 P_i 为 $P(T_{i-1},T_i)$,K 为 $(1+k\delta)^{-1}$．t 时刻单期利率上限的价值为 $B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_i}^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$ 等于

$$(1 + k\delta)B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_{T_{i-1}}^{-1}(K - P_i)^+ \mid \mathcal{F}_t).$$

这正好为 $(1+k\delta)$ 份标的物为 T_i-债券、敲定价为 K 及执行时刻为 T_{i-1}的看跌期权的价值．由期权定价公式（及看跌－看涨期权平价公式）便可对单期利率上限定价了．

利率下限（floor）与利率上限性质类似，但意义正好相反，一方收到一定量的保证金同意在每一时刻 T_i 所支付的利率永远不低于某个利率水平 k. 该合约在 T_i 的价值为

$$\delta(k - L(T_{i-1}))^+.$$

对应于期权平价公式，也有相应的利率下限－利率上限平价公式，即单期利率下限减去单期利率上限等于 $(1+k\delta)\ P(t,T_i) - P(t,T_{i-1})$．如买入利率下限同时卖出利率上限，假设这两个合约规定的利率的上、下限都为相同的 k，则该投资组合相当于以浮动利率换取固定利率 k 的互换．

5.6.10 互换期权

互换期权（swaption）为赋予投资者在将来某个日期以敲定的利率进行互换的权力．

假设有一期权，允许我们以某个时期 T_0 开始的互换收到固定的支付，互换支付的时刻为 $T_i = T_0 + i\delta(i = 1,\cdots,n)$，固定的互换比例为 k. 则该期权在 T_0 时的价值为

$$\left(P(T_0,T_n) + k\delta\sum_{i=1}^{n}P(T_0,T_i) - 1\right)^{+}.$$

这正好相当于一个敲定价为1的 T_n-债券的看涨期权，该 T_n-债券在每一时刻 T_i 的息票率为 [171] k. 这绝不完全是巧合，因为一互换的报酬就是一附息债券减去一浮动债券（总有相同价值）. 如果在一互换中要得到固定利率，则在债券市场中处于买方. 一互换期权看起来就像一债券期权.

5.7　多因子模型

如果我们想要对依赖于一系列债券的产品进行定价，那么用多因子模型更合适一些. Heath-Jarrow-Morton 的文章给出一个简单的例子，它是 Ho-Lee 模型在两因子情形下的推广.

5.7.1　一个两因子模型

假设远期利率的演化方式为：

$$\mathrm{d}_t f(t,T) = \sigma_1 \mathrm{d}W_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)}\mathrm{d}W_2(t) + \alpha(t,T)\mathrm{d}t.$$

其中 σ_1，σ_2 和 λ 为常数，α 为 t 与 T 的确定性函数；W_1 为 Brown 运动，它描述了对收益曲线上所有到期日的点都有相同的“扰动”（长期因子）；而 W_2 为短期扰动，它对收益曲线上的长期末端点的影响很小. 该模型为 HJM 相容的，从该结构中便可获得所有的市场信息. 在这种特殊情形下 HJM 的完备性条件可简化为：存在两个$\mathcal{F}$-可料过程 $\gamma_1(t)$ 和 $\gamma_2(t)$ 使得漂移 α 为

$$\alpha(t,T) = \sigma_1\gamma_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda(T-t)}\gamma_2(t) + \sigma_1^2(T-t) + \frac{\sigma_2^2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(T-t)})e^{-\lambda(T-t)},$$

因此，上述漂移与鞅测度漂移相差两个函数自由度. 在鞅测度下（$\gamma_1 = \gamma_2 = 0$），远期利率为

$$f(t,T) = \sigma_1 W_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda T}\int_0^t e^{\lambda s}\mathrm{d}W_2(s) + f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\mathrm{d}s.$$

像 Ho-Lee 模型一样，该模型所对应的远期利率也服从正态分布的，从而可能取负值. 然 [172] 而，该模型技术上易于处理且有显式的期权定价公式. 由远期利率公式 $-\log P(t,T) = \int_t^T f(t,u)\mathrm{d}u$ 可以推出

$$-\log P(t,T) = \sigma_1(T-t)W_1(t) + \frac{\sigma_2}{\lambda}(e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T})\int_0^t e^{\lambda s}\mathrm{d}W_2(s) + \int_t^T f(0,u)\mathrm{d}u + \int_0^t\int_t^T \alpha(s,u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

瞬时利率为

$$r_t = \sigma_1 W_1(t) + \sigma_2 e^{-\lambda t}\int_0^t e^{\lambda s}\mathrm{d}W_2(s) + f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)\mathrm{d}s,$$

上式表明瞬时利率由 Brown 运动以及与之独立的均值回归（Ornstein-Uhlenbeck）过程再加上漂移构成．然而，在多因子情形下，短期利率不能在债券价格信息载体中占有主导地位．

令 $\overline{\sigma}^2(t,T)$ 为 $\log P(t,T)$ 的方差（期限方差），我们有

$$\overline{\sigma}^2(t,T) = \sigma_1^2(T-t)^2 t + \left(\frac{\sigma_2}{\lambda}(1-e^{-\lambda(T-t)})\right)^2 \frac{1}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t}).$$

由上述 r_t 的表达式可知 $\int_0^t r_s\mathrm{d}s$ 服从正态分布，从而现金债券 $B_t = \exp\ (\int_0^t r_s\mathrm{d}s)$ 服从对数正态分布．只要给定了资产与现金债券价格的联合对数正态性，我们就可以应用 6.2 节的结果．因此，标的物为 T-债券、敲定价格为 k、执行时间为 t 的期权价格为

$$V_0 = P(0,t)\left(F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2(t,T)}{\overline{\sigma}(t,T)}\right) - k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2(t,T)}{\sigma(t,T)}\right)\right),$$

其中，F 为 $P(0,T)/P(0,t)$，即 T-债券的远期价格．该 Black-Scholes 类型公式允许我们可以对诸如利率上限、利率下限以及贴现的 T-债券期权进行定价．然而，在多因子背景下，以前所使用的附息债券期权的定价方法不再适用，这使得对这类期权以及互换期权定价陷入困难． [173]

5.7.2 广义的多因子正态模型

我们可以把上述的两因子模型推广到广义的多因子模型，使得远期利率也为正态的，并且也可以得到显式的 Black-Scholes 类型的期权定价公式．

下面我们用完全一般的 n-因子模型作为例子说明，如果可以将波动率曲面 $\sigma_i(t,T)$ 写成乘积的形式

$$\sigma_i(t,T) = x_i(t)y_i(T),$$

其中 x_i 和 y_i 为确定性函数．则远期利率由下式所驱动：

$$\mathrm{d}_t f(t,T) = \sum_{i=1}^n y_i(T)x_i(t)\mathrm{d}W_i(t) + \alpha(t,T)\mathrm{d}t,$$

这里，函数 x_i 决定了 t 时刻"第 i 型扰动"的大小，函数 y_i 控制了对不同到期日扰动的方式．在单因子 $n=1$ 情形，这个框架将 Ho-Lee 模型（$x(t)=\sigma$，$y(T)=1$）和 Vasicek 模型（$x(t)=\sigma_t\exp(\int_0^t\alpha_s\mathrm{d}s)$，$y\ (T)=\exp(-\int_0^T\alpha_s\mathrm{d}s)$）相结合．

为了使市场是完备的，我们需要对 α 和 y_i 施加两个条件．首先，存在 n 个$\mathcal{F}$-可料过程 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$，使得

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)y_i(t)(\gamma_i(t) + x_i(t)Y_i(t,T)),$$

其中 $Y_i(t,T) = \int_t^T y_i(u)\mathrm{d}u$. 换言之，与对冲相容的漂移在鞅漂移周围张成一个 n-维函数空间．其次，对所有的 $t<T_1$ 及每个由 n 个到期日 $T_1<T_2<\cdots<T_n$ 组成之集合，矩阵 $A_t=(a_{ij}(t))$，$(a_{ij}(t)=Y_j(t,T_i))$ 必须为非奇异的，该条件即是说所有的函数 y_i 都不相同．例如，如果每个 σ_i 有下列形式

$$\sigma_i(t,T)=\sigma_i(t)\exp(-\lambda_i(T-t)),$$

其中 $\sigma_i(t)$ 为时间的确定性函数，λ_i 为不同的常数，则可满足上述条件．

对一般的波动率曲面 $\sigma_i(t,T)=x_i(t)\ y_i(T)$，短期利率和远期利率均服从正态分布，因此债券价格服从对数正态分布，Black-Scholes 类型公式成立（见6.2节）．令 F 表示 t 时刻 T-债券的远期价格，$F=\dfrac{P(0,T)}{P(0,t)}$．令 σ 为 T-债券直到 t 时刻的远期波动率，即 $\sigma^2 t$ 为 $\log P(t,T)$的方差，或

174

$$\sigma^2 = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2(t,T)\int_0^t x_i^2(s)\,\mathrm{d}s,$$

则标的物为 T-债券、敲定价为 k 及执行时刻为 t 的期权在时刻0的价值为

$$V_0 = P(0,t)\left(F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}+\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)-k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right),$$

5.7.3 Brace-Gatarek-Musiela 模型

Brace-Gatarek-Musiela（BGM）模型是 HJM 模型的特例，它侧重于 δ-区间长的 LIBOR 利率．下面稍微简化他们的记号为

$$L(t,T) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)}-1\right).$$

因此 $L(t,T)$ 为在 T 时刻借款在长为 δ-区间上的远期 LIBOR 利率．

由远期波动率 $\sigma_i(t,T)$ 定义的广义的 HJM 模型（n 因子）若 BGM 模型则应取这样的 σ，使得

$$\int_T^{T+\delta}\sigma_i(t,u)\,\mathrm{d}u = \frac{\delta L(t,T)}{1+\delta L(t,T)}\gamma_i(t,T).$$

对所有小于 T 的 t 成立．这里 γ 为某个确定性的取值于$\mathbb{R}^n$ 的函数且关于 T 绝对连续．

从而，在鞅测度$\mathbb{Q}$ 下，L 满足的 SDE 为

$$\mathrm{d}_t L(t,T) = L(t,T)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(t,T)\left(\mathrm{d}W_i(t)+\int_t^{T+\delta}\sigma_i(t,u)\,\mathrm{d}u)\,\mathrm{d}t\right).$$

更有意思的是，在远期测度$\mathbb{P}_{T+\delta}$下（见6.4节），L 的 SDE 为

$$d_t L(t,T) = L(t,T) \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(t,T) \, d\widetilde{W}_i(t),$$

175

其中 $\widetilde{W}_t$ 为 $\mathbb{P}_{T+\delta}$-Brown 运动．这样，$L(t,T)$ 作为 t 的过程，不仅为 $\mathcal{F}_{T+\delta}$-鞅，也服从对数正态分布．后面我们将看到，它的这些性质可以使我们很容易对利率上限和互换期权进行定价．

为便于定价，我们需要知道的只是函数 γ 而不是整个波动率结构．而函数 γ 表示在 t 时刻不同的远期到期日 T 的 *LIBOR* 利率变化之间的相互关系．在实践中，可通过比较模型价格与市场价格来校准 γ. 例如，在他们的论文中，*Brace*、*Gatarek* 和 *Musiela* 定义 γ 函数为

$$\gamma_i(t,T) = f(t)\gamma_i(T-t),$$

通过已知的利率上限及互换期权的价格来校准．

简记瞬时的 *LIBOR* 利率 $L(T,T)$ 为 $L(T)$．假如有一合约，在一系列时刻 $T_i = T_0 + i\delta (i = 1,\cdots,n)$ 支付，如果 T_{i+1} 时刻的支付依赖于 T_i 时刻的 *LIBOR* 利率，例如 $X = f(L(T_i))$，则所支付的在 t 时刻的价值为

$$V_t = P(t,T_{i+1}) \, \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{T_{i+1}}}(f(L(T_i)) \mid \mathcal{F}_t),$$

由于$\mathbb{P}_{T_{i+1}}$下 $L(T_i)$ 服从对数正态分布，我们可以对简单的 f 求出该表达式的显式解．

其中简单的 f 为 T_i 时刻的单期利率上限支付 $\delta(L(T_{i-1} - k)^+$，在这种情形下，t 时刻单期利率上限的价值 V_t 等于

$$\delta P(t,T_i)\left\{F\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} + \frac{1}{2}\zeta^2(t,T_{i-1})}{\zeta(t,T_{i-1})}\right) - k\Phi\left(\frac{\log\frac{F}{k} - \frac{1}{2}\zeta^2(t,T_{i-1})}{\zeta(t,T_{i-1})}\right)\right\},$$

其中 F 为远期 *LIBOR* 利率 $L(t,T_{i-1})$，$\zeta^2(t,T)$ 为给定信息集$\mathcal{F}_t$ 下 $\log L(T)$ 的方差即等于 $\int_t^T \left|\gamma(s,T)\right|^2 ds$. 该定价公式也有熟悉的 Black-Scholes 形式，这是因为在远期测度$\mathbb{P}_{T_i}$下 $L(T_{i-1})$服从对数正态分布，可以像通常一样进行计算．

我们甚至也可以对互换期权（近似地）定价．考虑一期权允许投资者在时刻 $T_i = T_0 + i\delta$ （$i=1,...,n$）以比例 k 支付固定利率而收到浮动利率．令

$$\Gamma_i^2 = \int_t^{T_0} \left|\gamma(s,T_{i-1})\right|^2 ds$$

为在远期测度$\mathbb{P}_{T_i}$下已知$\mathcal{F}_t$ 时 $\log L(T_0, t_{i-1})$ 的方差．

我们又定义

$$d_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\delta L(t,T_{j-1})}{1+\delta L(t,T_{j-1})}\Gamma_j - \frac{1}{2}\Gamma_i.$$

176

令 s_0 为下列方程

$$s: \sum_{i=1}^{n}(k\delta + I(i=n))\left\{\prod_{j=1}^{i}\left(1+\delta L(t,T_{j-1})\exp(\Gamma_j(s+\mathrm{d}_j))\right)\right\}^{-1} = 1$$

的惟一根．则上面所定义的互换期权在 t 时的价值可以由下式

$$V_t = \delta\sum_{i=1}^{n}P(t,T_i)\left\{L(t,T_{i-1})\Phi\left(\frac{F_i+\frac{1}{2}\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\right)-k\Phi\left(\frac{F_i-\frac{1}{2}\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\right)\right\}$$

177

逼近，其中 $F_i = -\Gamma_i(s_0+\mathrm{d}_i)$.

第 6 章　更一般的模型

Black-Scholes 股票模型假定，市场上仅存在一种股票，股票的漂移和波动率是常数；还假设现金债券是确定的，其波动率为零．这些假设是没有必要的．本节将逐一处理这些限制而且提出一个更为一般化的模型，看看该模型是如何为衍生证券定价和套期保值的．并揭示控制以下所有场景下所讨论的模型的基本框架．

这并不是说，所有模型，不论如何复杂或古怪，将总能给出好的定价．但是假如一种模型为 Brown 运动所驱动，且无任何交易成本，那么这个模型在这个框架下是可分析的．

6.1　一般股票模型

回想一下，Black-Scholes 模型包含一种债券 B_t 和一种股票 S_t 且它们服从随机微分方程组

$$dB_t = rB_t dt,$$
$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + \mu dt).$$

这里 r 是常值利率，σ 是股票的常值波动率且 μ 是股票的常值漂移，且使用 4.4 节所讨论的随机微分方程公式．过程 W 是$\mathbb{P}$-Brown 运动．

我们所讨论的最一般的随机过程有可变的漂移和波动率．它们不仅随时间变化，而且也依赖于股票自身的运动（或等价地，依赖于 Brown 运动 W 的运动)．我们可以通过股票价格函数 $\sigma(S_t)$，甚至股票价格和时间的函数 $\sigma(S_t, t)$ 来替代常数 σ. 纵使这样做也不能考虑到完全一般的模型．（例如，t 时刻波动率可能依赖于直到 t 时刻股票价格所达到的最大值．）我们将用一个一般的$\mathcal{F}$-可料过程 σ_t 替代 σ，用$\mathcal{F}$-可料过程 r_t 和 μ_t 分别替代常数 r 和 μ. 随机微分方程组更新为 178

$$dB_t = r_t B_t dt,$$

$$dS_t = S_t(\sigma_t dW_t + \mu_t dt)$$

它们的解为

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right),$$

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \left(\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right) ds\right).$$

[技术上的注记：过程 σ_t，r_t 和 μ_t 不能完全一般化，因为为了使上述积分存在，它们必须是足

够可积的. 确切地说,我们需要(以$\mathbb{P}$-概率1)积分$\int_0^T \sigma_t^2 dt$, $\int_0^T |r_t| dt$和$\int_0^T |\mu_t| dt$是有限的.]

6.1.1 测度变换

如前面章节所述，我们的目标在于构造一贴现股票价格$Z_t = B_t^{-1} S_t$使其成为鞅. 这能够通过在W后增加一漂移项γ_t而做到. 即，假如$\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$是$\mathbb{Q}$-Brown运动，那么$Z_t$满足随机微分方程

$$dZ_t = Z_t(\sigma_t d\widetilde{W}_t + (\mu_t - r_t - \sigma_t \gamma_t) dt).$$

且假如

$$\gamma_t = \frac{\mu_t - \gamma_t}{\sigma_t},$$

那么正如在风险市场价格章节（4.4）中所暗示的，Z是一$\mathbb{Q}$-鞅. 现在市场风险价格依赖于时间t和直到这一时刻的样本轨道. 可是，它将继续独立于所考虑的金融工具. 在任何实际的情形下，我们也应该检验γ_t是否满足C-M-G增长条件$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \gamma_t^2 dt\right) < \infty$.

在测度$\mathbb{Q}$下，Z服从随机微分方程

$$dZ_t = \sigma_t Z_t d\widetilde{W}_t,$$

因为它是无漂移的,所以它至少是一局部鞅. 我们也应该检验Z是否是一恰当的鞅. 例如，我们只要检验$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t^2 dt\right)$是有限的就足以保证$Z$是一恰当的鞅.

179

6.1.2 复制策略

假如X是即将被定价的且到期时刻为T的衍生证券,那么定价的步骤与Black-Scholes定价技术并无太大的差异.

可以通过贴现权益的条件期望过程$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t)$来构造一$\mathbb{Q}$-鞅$E_t$. 由鞅表示定理（3.5节）可知，鞅$E_t$可以表示为某个$\mathcal{F}$-可料过程$\phi_t$的积分，即

$$E_t = E_0 + \int_0^t \phi_s dZ_s,$$

（注意，我们要求σ_t永不为零.）令ϕ_t是t时刻所持有的股票资产组合，那么

$$dE_t = \phi_t dZ_t.$$

令债券资产组合持有ψ_t是$E_t - \phi_t Z_t$，那么t时刻资产组合价值是

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = B_t E_t.$$

因为价值 V_t 的变化仅仅由资产价格的变化所引起，故可以得到（正如第三章所述）(ϕ,ψ) 是自融资的，即

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t.$$

所以，(ϕ,ψ) 是一初始值为 $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)$ 且终期条件为 $V_T = X$ 的自融资策略． [180]

6.1.3 衍生证券定价

套利讨论使我们确信时刻 t 衍生证券的惟一价格是

衍生证券价格

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)X \mid \mathcal{F}_t\right).$$

换句话说，时刻 t 衍生证券的价值是以直到 t 时刻的历史为条件的适当地贴现了的数学期望，是关于使得贴现股票过程成为一个鞅的测度——风险中性测度所取的数学期望．

该表达方式实际上给予了期权价值 V_t 最为清晰明确的回答．为了做某些特别计算，我们需要知道贴现率 r_t、股票波动率 σ_t（虽然不是它的漂移）和衍生证券本身．

6.1.4 实施

在实践中，假如模型比 Black-Scholes 模型更加复杂，相应的数学期望就不可能进行解析分析了（6.2 节中的对数正态情况显然是一个例外．）．我们必须使用数值方法替而代之加以解决．

假如能逼近 t 时刻价值 V_t，那么对 ϕ_t 或“dV_t/dS_t”的逼近就是 delta 套期

$$\phi_t \approx \frac{\Delta V_t}{\Delta S_t},$$

这里 Δ 表示在一个时间小区间 $(t, t+\Delta t)$ 的变化．

6.2 对数正态模型

我们已经看到，纵使不用 Black-Scholes 模型工作，Black-Scholes 公式仍然成立（参见 4.1 节）．模型的公共特征就是资产价格在鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下是对数正态分布的． [181]

在简单的 Black-Scholes 模型中，现金债券及股票的模型为

$$B_t = e^{rt} \text{和} S_t = S_0\exp(\sigma W_t + \mu t),$$

其中 r，σ 和 μ 是常数且 W 是$\mathbb{P}$-Brown 运动．在时刻 T 购买 F 的远期价格是

$$F = S_0 e^{rT}.$$

而且一个以 k 为敲定价格购买 S_T 的期权在零时刻的价值是

$$V_0 = e^{-rT}\left\{F\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

对数正态资产价格

若价格在鞅测度下服从对数正态分布，则非常便利．Black-Scholes 模型、某些货币和股票模型及简单的利率模型都拥有这种便利性．

清晰地说，假设已知股票 S_T 和现金债券 B_T 在鞅测度$\mathbb{Q}$ 下是联合对数正态分布的，$\sigma_1^2 T$ 是 $\log S_T$ 的方差，$\sigma_2^2 T$ 是 $\log B_T^{-1}$ 的方差（σ_1 和 σ_2 为期限波动率），ρ 是它们的相关系数，那么在时刻 T 购买 S 的远期价格是

$$F = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}S_T)}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1})}，\text{或等价地 } F = \exp(\rho\sigma_1\sigma_2 T)\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T),$$

且以 k 为敲定价格购买 S_T 的买入期权的价值是广义 Black-Scholes 公式

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1})\left\{F\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right) - k\Phi\left(\frac{\log \frac{F}{k} - \frac{1}{2}\sigma_1^2 T}{\sigma_1\sqrt{T}}\right)\right\}.$$

从下面能够看到这个公式的正确性．记 S_T 为

$$S_T = A\exp\left(\alpha_1 Z - \frac{1}{2}\alpha_1^2\right),\text{且 } \alpha_1^2 = \sigma_1^2 T,$$

这里 A 是常数$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T)$ 且 Z 在测度$\mathbb{Q}$ 下是一正态 $N(0,1)$ 随机变量．贴现因子 B_T^{-1} 服从对数方差为 $\sigma_2^2 T$ 且与股票对数价格的相关系数为 ρ 的对数正态分布．令 B 是它的期望 $B = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1})$，可以得到

182

$$B_T^{-1} = B\exp\left(\alpha_2(\rho Z + \bar{\rho} W) - \frac{1}{2}\alpha_2^2\right),\text{且 } \alpha_2^2 = \sigma_2^2 T,$$

这里 $\bar{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$，$W$ 是独立于 Z 的 $N(0,1)$ 正态随机变量．

那么贴现股票价格的数学期望是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}S_T) = AB\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha_1 + \rho\alpha_2)^2 + \frac{1}{2}\bar{\rho}^2\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2\right) = AB\exp(\rho\alpha_1\alpha_2).$$

所以 S_T 的远期价格就是 $F=A\exp(\rho\sigma_1\sigma_2 T)$. 重新表达 S_T 为:

$$S_T = F\exp\left(\alpha_1 Z - \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \rho\alpha_1\alpha_2\right),$$

则买入期权的价值为

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}(S_T-k)^+) = B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{\rho\alpha_2 Z-\frac{1}{2}\rho^2\alpha_2^2}(S_T-k)^+),$$

上式也等于

$$B\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(Fe^{(\alpha_1+\rho\alpha_2)Z-\frac{1}{2}(\alpha_1+\rho\alpha_2)^2} - ke^{\rho\alpha_2 Z-\frac{1}{2}\rho^2\alpha_2^2}; Z\geqslant -z),$$

其中 z 是临界值 $z=\left(\log\frac{F}{k}-\frac{1}{2}\alpha_1^2-\rho\alpha_1\alpha_2\right)/\alpha_1$. 对任意常数 y 和 z, 使用概率结论 $\mathbb{E}(e^{yZ-\frac{1}{2}y^2}; Z\geqslant -z)=\Phi(y+z)$, 我们就获得了所要的结果. [记号$\mathbb{E}(X;A)$表示随机变量 X 关于事件 A 的数学期望,或者也可等价地记为$\mathbb{E}(XI_A)$,这里 I_A 是事件 A 的示性函数.]

6.3 多股票模型

Black-Scholes 模型假定市场上仅有一种股票. 在许多情况下, 这个假定并无太大损害. 如果我们写下一个以通用公司股票为标的股票的期权, 且股票价格模型已恰当地反映了这一标的股票的运动行为, 那么我们并未受到其他证券运动的影响. 可是, 更为复杂的股票产品, 例如双重货币工具, 依赖于至少两个不同的证券. 在债券市场上尤为如此, 这里, 互换货币价值受到许多具有不同到期日债券运动的影响. [183]

一个好的多证券模型不仅必须单独地描述每一种证券, 而且也必须表明它们之间的交互影响及相依性. 例如, 我们在 4.5 节讨论的双重货币工具, 它联系于英磅对美元的汇率及一种 UK 股票. 这两个过程有某种相依度. 在实际当中, 一种证券的大的运动可能与另一种证券相应的运动相联系, 这种变化表明两种证券是相关的.

适应于 n-维 Brown 运动的随机过程

一个随机过程 X 是一个连续过程 $(X_t: t\geqslant 0)$ 使得 X_t 能被写为

$$X_t = X_0 + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t \sigma_i(s)\,\mathrm{d}W_s^i + \int_0^t \mu_s\,\mathrm{d}s,$$

这里 $\sigma_1\cdots\sigma_n$ 和 μ 是随机$\mathcal{F}$-可料过程且使得积分 $\int_0^t\left(\sum_i\sigma_i^2(s)+|\mu_s|\right)\mathrm{d}s$ 对所有的时间 t (以概率 1) 有限. 这个方程的微分形式可被写为

$$\mathrm{d}X_t = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t)\,\mathrm{d}W_t^i + \mu_t\,\mathrm{d}t.$$

多股票能被多维 Brown 运动所驱动．不同于单个$\mathbb{P}$-Brown 运动，在 n-因子情况下，将有 n 个独立的 Brown 运动 $W_t^1,\cdots,W_t^n$. 这意味着每一个 W_t^i 都是单个的 Brown 运动，而且它们中任何一个的运动行为完全不受其他 Brown 运动的影响．设过滤族$\mathcal{F}_t$ 是所有 n 个 Brown 运动历史的总和，换一句话说，$\mathcal{F}_T$ 是 n-维向量$(W_t^1,\cdots,W_t^n)$直到 T 时刻为止的历史．由此可以得到随机过程的一种改进的定义（见框图中的定义）．

在原来的（单因子模型）定义中，漂移项是不变的，但是现在每一个因子都存在一波动率过程 $\sigma_i(t)$. 必须记住在多因子情形下波动率不再是一标量，而是一向量．过程 X 的总

[184]

波动率是 $\sqrt{\sigma_1^2(t)+\cdots+\sigma_n^2(t)}$．换句话说，$dX_t$ 的方差是 $\sum_i\sigma_i^2(t)dt$，它由每一个 Brown 运动分量 W^i 的贡献 $\sigma_i^2(t)dt$ 总和所构成（因为 Brown 运动的分量是独立的）．

Itô 公式及乘积律的 n-因子版本如下：

Itô 公式（n-因子情形）

假如 X 是一随机过程，满足 $dX_t=\sum_i\sigma_i(t)dW_t^i+\mu_t dt$，且 f 是一确定的两次连续可微的函数，那么 $Y_t:=f(X_t)$ 也是一随机过程且其随机增量为

$$dY_t=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sigma_i(t)f'(X_t)\Big)dW_t^i+\Big(\mu_t f'(X_t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2(t)f''(X_t)\Big)dt.$$

另外，当每一个附加的 Brown 运动具有相同的波动率项时，这个公式类似于单因子 Itô 公式．

乘积律（n-因子）

假如 X 是一随机过程满足 $dX_t=\sum_i\sigma_i(t)dW_t^i+\mu_t dt$，且 Y 是一随机过程满足 $dY_t=\sum_i\rho_i(t)dW_t^i+\upsilon_t dt$，那么 X_tY_t 是一随机过程且满足

$$d(X_tY_t)=X_tdY_t+Y_tdX_t+\Big(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t)\rho_i(t)\Big)dt.$$

这个新版本统一了在 3.3 节所遇到的两个明显不同的乘积律公式．假如 X_t 和 Y_t 都适应于相同的 Brown 运动 W_t，那么这个公式与第一种情况相同．假如 X_t 和 Y_t 适应于两个独立的 Brown 运动，称为 W_t^1 和 W_t^2，那么 X_t 对于 W^2 将有零波动率，即 $\sigma_2(t)=0$，且类似地，Y_t 对于 W^1 将有零波动率，即$\rho_1(t)=0$．这样一来，在 n-因子乘积律中的 $\sum\sigma_i(t)\rho_i(t)$ 项将一致地为零，这与 3.3 节中的第二种情形一致．

当 W 是 n-维 Brown 运动，漂移项 γ 是一 n-维向量过程，且当 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma_t|^2dt\Big)$ 是有

[185]

限时，Cameron-Martin-Girsanov 定理继续成立．

Cameron-Martin-Girsanov 定理（n-因子情形）

设 $W=(W^1,\cdots,W^n)$ 是 n-维$\mathbb{P}$-Brown 运动．假设 $\gamma_t=(\gamma_t^1,\cdots,\gamma_t^n)$是一$\mathcal{F}$-可料 n-向量过程，满足增长条件 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T|\gamma_t|^2\mathrm{d}t\right)<\infty$．令 $\tilde{W}_t^i=W_t^i+\int_0^t\gamma_s^i\mathrm{d}s$，那么存在一新测度 $\mathbb{Q}$ 等价于测度$\mathbb{P}$，直到 T 时刻，使得 $\tilde{W}:=(\tilde{W}^1,\cdots,\tilde{W}^n)$ 是直到 T 时刻为止的 n-维$\mathbb{Q}$-Brown 运动．

$\mathbb{Q}$ 关于测度$\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数是

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\exp\left(-\sum_{i=1}^n\int_0^T\gamma_t^i\mathrm{d}W_t^i-\frac{1}{2}\int_0^T\left|\gamma_t\right|^2\mathrm{d}t\right).$$

这个定理存在逆定理，类似于单因子情况下的逆定理．

最后，回想 5.5 节的 n-因子的鞅表示定理．设 W 是 n-维$\mathbb{Q}$-Brown 运动，M 是一 n-维$\mathbb{Q}$-鞅且具有非退化波动率矩阵，N 是任意其他一维$\mathbb{Q}$-鞅，那么存在一$\mathcal{F}$-可料 n-维向量过程 $\phi_t=(\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n)$使得

$$N_t=N_0+\sum_{j=1}^n\int_0^t\phi_s^j\mathrm{d}M_s^j.$$

6.3.1 一般的 n-因子模型

以后将看到，以下这一点是非常重要的，即至少有和 Brown 运动因子一样多的标的证券（不包括现金债券）．一般地说，若证券的数目比因子的数目多，那么市场将存在套利；若证券的数目比因子的数目少，我们将不能进行套期．这种情况并不如同某种情况（例如，债券市场有数目不限的不同到期的债券）一样地简单，但是我们从经典情况开始叙述．

我们的模型将包括一通常的现金债券 B_t 和 n 个不同的市场证券 $S_t^1,\cdots,S_t^n$．它们的随机微分方程是

$$\mathrm{d}B_t=r_tB_t\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}S_t^i=S_t^i\left(\sum_{j=1}^n\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_t^j+\mu_t^i\mathrm{d}t\right),\qquad i=1,\cdots,n.$$

186

其中 r_t 是瞬时短期利率过程，μ_t^i 是第 i 个证券的漂移，且$(\sigma_{ij})_{j=1}^n$是它们的波动率向量．因为每一种证券有一个波动率向量，n 个这种向量的族形成过程的一个波动率矩阵 $\Sigma_t=(\sigma_{ij}(t))_{i,j=1}^n$．这些证券的积分表现形式是

$$B_t=\exp\left(\int_0^t r_s\mathrm{d}s\right),$$

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s)\mathrm{d}W_s^j + \int_0^t \left(\mu_s^i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2(s)\right)\mathrm{d}s\right).$$

6.3.2 测度变换

现在要找一新的测度$\mathbb{Q}$，使得在这个新测度下，所有贴现的股票价格同时是$\mathbb{Q}$-鞅.

由n-因子C-M-G定理，设为W_t增加一漂移项$\gamma_t=(\gamma_t^1,\cdots,\gamma_t^n)$，使

$$\widetilde{W}_t^i = W_t^i + \int_0^t \gamma_s^i \mathrm{d}s$$

是一$\mathbb{Q}$-Brown运动. 那么股票的贴现价格$Z_t^i = B_t^{-1}S_t^i$满足随机微分方程

$$\mathrm{d}Z_t^i = Z_t^i\left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}\widetilde{W}_t^j + \left(\mu_t^i - r_t - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\gamma_t^j\right)\mathrm{d}t\right).$$

为了使每一个i漂移项为零，必须有

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)\gamma_t^j = \mu_t^i - r_t,\ \text{对所有的}\ t, i = 1,\cdots,n.$$

上式能够用向量和矩阵的形式表示为

$$\Sigma_t \gamma_t = \mu_t - r_t \mathbf{1},$$

其中Σ_t是矩阵（$\sigma_{ij}(t)$）而$\mathbf{1}$是常值向量（1，1，…，1）. 对任何特别的t，这个向量方程可能有可能没有一个解γ_t，解的存在性依赖于Σ_t，μ_t和r_t的实际值. 如果矩阵Σ_t是可逆的，那么必定存在一个惟一的γ_t等于

187

$$\gamma_t = \Sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t\mathbf{1}).$$

单因子风险市场价格公式$\gamma_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t)$现在是一种特别的情况. 这意味着，假若$\Sigma_t$对每个$t$是可逆的且$\gamma_t$满足C-M-G条件$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\gamma_t|^2 \mathrm{d}t\right) < \infty$，那么存在一测度$\mathbb{Q}$使得股票的贴现价格为$\mathbb{Q}$-鞅.（或者至少是$\mathbb{Q}$-局部鞅. 对每个$i$，为了使$Z^i$是一恰当的$\mathbb{Q}$-鞅，需要积分条件即$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_{ij}(t)\mathrm{d}t < \infty.\right)$

6.3.3 复制策略

设X是一T时刻到期的衍生证券，且设E_t是一$\mathbb{Q}$-鞅$E_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$. 假若矩阵$\Sigma_t$总是可逆的，那么由$n$-因子鞅表示定理可知，存在一波动率向量过程$\phi_t = (\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n)$，使得

$$E_t = E_0 + \sum_{j=1}^n \int_0^t \phi_s^j \mathrm{d}Z_s^j.$$

此时Σ_t的可逆性是基本的. 套期策略将是$(\phi_t^1,\cdots,\phi_t^n,\psi_t)$，其中$\phi_t^i$是时刻$t$对证券$i$的持

有且 ψ_t 是对债券的持有．如同一般情况，债券持有 ψ 是

$$\psi_t = E_t - \sum_{j=1}^{n} \phi_t^j Z_t^j,$$

则资产组合的价值是 $V_t = B_t E_t$. 资产组合是自融资的，因为

$$dV_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_t^j dS_t^j + \psi_t dB_t.$$

衍生证券定价

t 时刻衍生证券的价值是

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) X \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

[188]

6.4 计价单位

通常选择计价单位为一种现金债券，但并不需要一定是这样．事实上，计价单位不仅有波动率，而且也可以是任何可交易的金融工具．在汇率内容中我们已经看到，我们能够选择使用何种货币现金债券．但是无论选择哪种计价单位，衍生证券的价格将总是相同的．这是因为计价单位的选择同我们通常取的无波动性的现金流并无多少关系．

在证明第 3 章中的自融资条件时，我们假定了计价单位没有任何的波动率．这实际上并不是必要的．但是我们确实不得不检验使用的自融资方程是否有效．我们打算表明

自融资策略

一个资产组合策略 (ϕ_t, ψ_t)，持有一种股票 S_t 和一种可能波动的现金债券 B_t，价值 $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ 和贴现价值 $E_t = \phi_t Z_t + \psi_t$，这里 Z 是贴现股票过程 $Z_t = B_t^{-1} S_t$. 假如

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t, \quad \text{或等价地} \quad dE_t = \phi_t dZ_t,$$

那么策略是自融资的．

回想单因子乘积律

$$d(XY)_t = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t dt,$$

其中随机过程 X 和 Y 的随机微分为

$$dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt,$$
$$dY_t = \rho_t dW_t + v_t dt.$$

假设有一策略 (ϕ, ψ)，其贴现值 E_t 满足 $dE_t = \phi_t dZ_t$. 我们想证明 (ϕ, ψ) 是自融资的，

则需用到乘积律的两个应用．首先

189

$$dV_t = d(B_tE_t) = B_tdE_t + E_tdB_t + \sigma_t(\phi_t\rho_t)dt,$$

其中 σ_t 是 B_t 的波动率，ρ_t 是 Z_t 的波动率（因此 $\phi_t\rho_t$ 是 E_t 的波动率）．将 $dE_t = \phi_tdZ_t$ 和 $E_t = \phi_tZ_t + \psi_t$ 代入上式整理为

$$dV_t = \phi_t(B_tdZ_t + Z_tdB_t + \sigma_t\rho_tdt) + \psi_tdB_t.$$

再次使用乘积律能够证明上式括号中的项等于 $d(BZ)_t = dS_t$．从而证明是自融资方程．这对具有多股票的 n-因子模型也成立．

变换计价单位

假定我们有许多证券，包括一些股票 $S_t^1, \cdots, S_t^n$ 和两个可作为计价单位的 B_t 和 C_t．假如我们选择 B_t 作为我们的计价单位，我们要找一个测度$\mathbb{Q}$（等价于原来的测度），在

$$B_t^{-1}S_t^i \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ 且 } B_t^{-1}C_t$$

下是$\mathbb{Q}$-鞅．那么在 T 时刻支付为 X 的衍生证券在 t 时刻的价值是

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

可是假设选择 C_t 成为计价单位．那么存在一不同的测度$\mathbb{Q}^C$，在

$$C_t^{-1}S_t^i \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ 和 } C_t^{-1}B_t$$

是一$\mathbb{Q}^C$-鞅．我们能确实地找到$\mathbb{Q}^C$，或者至少找到它的关于$\mathbb{Q}$ 的 Radon-Nikodym 导数．回想 3.4 节 Radon-Nikodym 的性质（ii），对任何过程 X_t，

$$\zeta_s\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^C}(X_t \mid F_s) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_tX_t \mid \mathcal{F}_s),$$

这里 ζ_t 是测度过程 $\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{d\mathbb{Q}C}{d\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right)$的变换．由此得到，假如 X_t 正好是$\mathbb{Q}^C$-鞅，那么

$$\zeta_sX_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_tX_t \mid \mathcal{F}_s),$$

190

这样一来 ζ_tX_t 也是一$\mathbb{Q}$-鞅．

典型的$\mathbb{Q}^C$-鞅（包括取值为 1 的常值鞅）是 1，$C_t^{-1}B_t$，$C_t^{-1}S_t^1, \cdots$，$C_t^{-1}S_t^n$ 且类似地 $B_t^{-1}C_t$，1，$B_t^{-1}S_t^1, \cdots, B_t^{-1}S_t^n$ 是$\mathbb{Q}$-鞅．所有相应的配对有一公共的商 $\zeta_t = B_t^{-1}C_t$．这样一来$\mathbb{Q}^C$ 关于$\mathbb{Q}$ 的 Radon-Nikodym 导数是计价单位 C 对计价单位 B 的商，

$$\frac{d\mathbb{Q}^C}{d\mathbb{Q}} = \frac{C_T}{B_T}.$$

T 时刻支付为 X 的价格在$\mathbb{Q}^C$测度下是

$$V_t^C = C_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^C}(C_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

再次使用 Radon-Nikodym 结论$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^C}(X \mid \mathcal{F}_t) = \zeta_t^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_T X \mid \mathcal{F}_t)$，那么

$$V_t^C = \zeta_t^{-1} C_t \, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\zeta_T C_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t) = B_t \, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t).$$

这正好与在$\mathbb{Q}$下的价格 V_t 是相同的，所以这两个是一致的，正如汇率章节（4.1）所讨论的，美金和英镑的投资者认同所有的衍生证券价格是相同的.

例 利率市场的远期测度

在利率模型中，通常使用 T 时刻到期的债券（T- 债券具有价值 $P(t,T)$）作为计价单位. 对应于这种计价单位的鞅测度称为 T-远期测度$\mathbb{P}_T$，且这个鞅测度使得远期利率 $f(t,T)$ 以及借贷到期日为 T 的 δ-周期的 LIBOR 利率是一$\mathbb{P}_T$-鞅.

新的计价单位是一种 T-债券，它在零时刻被正规化为有一个单位的价值. 假如我们称这种币值单位为 C_t，那么 $C_t = P(t,T) \mid P(0,T)$. 这样远期测度$\mathbb{P}_T$关于$\mathbb{Q}$的 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} = \frac{C_T}{B_T} = \frac{1}{P(0,T)B_T}.$$

相关的$\mathbb{Q}$-鞅是

$$\zeta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_T}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{C_t}{B_t} = \frac{P(t,T)}{P(0,T)B_t}.$$

现在在 T 时刻购买 X 的远期价格在 t 时刻的值是它的当前值 V_t 通过一 T-债券的收益所尺度化而获得，即 $F_t = P^{-1}(t,T)B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t)$. 进而，由 Radon-Nikodym 导数的性质（ii）可知，F_t 等于 [191]

$$F_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}(X \mid \mathcal{F}_t),$$

所以它自身是一$\mathbb{P}_T$-鞅. 计算 X 的远期价格现在只需在远期测度下取它的数学期望即可.

从 $P(t,T)$ 的随机微分方程，我们发现 ζ_t 满足

$$\mathrm{d}\zeta_t = \zeta_t \sum_{i=1}^{n} \Sigma_i(t,T)\mathrm{d}W_i(t),$$

其中 W 是 n-维$\mathbb{Q}$-Brown 运动，而$\Sigma_i(t,T)$ 是 $P(t,T)$ 关于 $W_i(t)$ 的波动率分量. 由 C-M-G 定理的逆可知

$$\widetilde{W}_i(t) = W_i(t) - \int_0^t \Sigma_i(s,T)\mathrm{d}s$$

是一$\mathbb{P}_T$-Brown 运动.

这就给出了利率衍生证券定价的另一种表达方式. 假如 X 是 T 时刻的支付，那么它在 t 时刻的价值是

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t) = P(t,T)\,\mathrm{E}_{\mathbb{P}_T}(X \mid \mathcal{F}_t).$$

所以 t 时刻 X 的价值正好是 X 的以直到时刻 t 的信息为条件的$\mathbb{P}_T$-条件数学期望（X 的远期

价格）乘以直到 T 时刻货币的（T-债券）时间价值的贴现值．

远期利率 $f(t,T)$ 也是 γ_T 的远期利率，所以 $f(t,T)$ 是一 $\mathbb{P}_T$-鞅且有

$$f(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_T}(r_T \mid \mathcal{F}_t),$$

$$\text{和}\quad \mathrm{d}_t f(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)\,\mathrm{d}\widetilde{W}_i(t)\ .$$

另一个远期测度鞅是 δ-周期的 LIBOR 利率

$$L_t = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t,T-\delta)}{P(t,T)} - 1\right).$$

192

更多的细节参见第5章（5.7节）．

6.5　外国货币利率模型

4.1节考察了汇率理论，第5章考察了利率市场．但是我们仍然没有研究具有外国货币的利率市场．这节我们将进行讨论．

为了方便定义，想像我们自己是在同时具有美元和英镑的利率市场的美金投资者．变量将是如表6-1

表6-1　记号

记号	含义
$P(t,T)$	美元零息债券市场价格
$f(t,T)$	在 T 时刻借入的美元远期利率（是 $-\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T)$）
$\sigma(t,T)$	$f(t,T)$ 的波动率
$\alpha(t,T)$	$f(t,T)$ 的漂移
r_t	美元短期利率（等于 $f(t,t)$）
B_t	美元现金债券（等于 $\exp\int_0^t r_s\mathrm{d}s$）
$Q(t,T)$	英镑零息债券市场价格
$g(t,T)$	在 T 时刻借入的英镑远期利率（是 $-\frac{\partial}{\partial T}\log Q(t,T)$）
$\tau(t,T)$	$g(t,T)$ 的波动率
$\beta(t,T)$	$g(t,T)$ 的漂移
u_t	英镑短期利率（等于 $g(t,t)$）
D_t	英镑现金债券（等于 $\exp\int_0^t u_s\mathrm{d}s$）
C_t	一英镑对美元的汇率
ρ_t	汇率的对数波动率
λ_t	汇率的漂移系数（$\mathrm{d}C_t/C_t$ 的漂移）．

正如在 HJM 模型中，我们将在由独立的 Brown 运动 $W_t^1,\cdots,W_t^n$ 所驱动的 n-因子模型中讨论．当然 n 可以是 1，但它不需要一定是这样．在 n 不为 1 的情况下，波动率 σ，τ 和 ρ 是 n-向量 $\sigma_i(t,T)$，$\tau_i(t,T)$ 和 $\rho_i(t)(i=1,\cdots,n)$.

这里有两个不同的利率市场（名义美元和名义英镑），加上一个与它们联系的货币市场．多因子模型方法需要反映在这 3 个市场中各种证券之间不同的相关程度． 193

这些过程的微分是

$$d_t f(t,T) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(t,T)\,dW_t^i + \alpha(t,T)\,dt,$$

$$d_t g(t,T) = \sum_{i=1}^n \tau_i(t,T)\,dW_t^i + \beta(t,T)\,dt,$$

$$dC_t = C_t\Big(\sum_{i=1}^n \rho_i(t)\,dW_t^i + \lambda_t dt\Big).$$

不考虑美元现金债券 B_t，市场上以美元可交易的证券由美元债券 $P(t,T)$、英镑 $C_tQ(t,T)$ 的美元价值及英镑现金债券 C_tD_t 的美元价值所组成．固定 T，且令这 3 种证券的美元贴现价值分别是 X，Y 和 Z，这里

$$X_t = B_t^{-1}P(t,T),$$
$$Y_t = B_t^{-1}C_tQ(t,T),$$
$$Z_t = B_t^{-1}C_tD_t.$$

为了简化后面的表达式，引入记号 Σ_i，T_i 和 $\tilde{T}_i$，其中

$$\Sigma_i(t,T) = -\int_t^T \sigma_i(t,u)\,du,$$

$$T_i(t,T) = -\int_t^T \tau_i(t,u)\,du,$$

$$\tilde{T}_i(t,T) = T_i(t,T) + \rho_i(t).$$

那么 $\Sigma_i(t,T)$ 是 $P(t,T)$ 的 W^i-波动率项，$T_i(t,T)$ 是 $Q(t,T)$ 的 W^i-波动率项，而是 $\tilde{T}_i(t,T)$ 是 $C_tQ(t,T)$ 的 W^i-波动率项．

和从前一样，我们遵循复制的 3 个步骤．第 1 步是作一个测度变换，在这个变换下，X_t，Y_t 和 Z_t 都是鞅．

对于任何可料 n-向量 $\gamma=(\gamma_i(t))_{i=1}^n$，存在一新测度 $\mathbb{Q}$ 和一 $\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\tilde{W}=(\tilde{W}_t^1,\cdots,\tilde{W}_t^n)$，这里 $\tilde{W}_t^i = \tilde{W}_t^i + \int_0^t \gamma_i(s)\,ds$. 那么 X，Y 和 Z 关于 $\mathbb{Q}$ 的随机微分方程是 194

$$dX_t = X_t\Big(\sum_{i=1}^n \Sigma_i(t,T)\,d\tilde{W}_t^i + \Big(\int_t^T(\xi(t,u)-\alpha(t,u))\,du\Big)dt\Big)$$

$$dY_t = Y_t\Big(\sum_{i=1}^n \tilde{T}_i(t,T)\,d\tilde{W}_t^i + \Big(v_t + \int_t^T(\eta(t,T)-\beta(t,u)\,du)\Big)dt\Big)$$

$$dZ_t = Z_t\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i(t)\,d\tilde{W}_t^i + v_t dt\Big),$$

其中 $\xi(t,T)$，$\eta(t,T)$ 和 v_t 的定义为

$$\xi(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,u)\Big(\gamma_i(t) - \Sigma_i(t,u)\Big),$$

$$\eta(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\tau_i(t,u)(\gamma_i(t) - \tilde{T}_i(t,u)),$$

$$v_t = \lambda_t - r_t + u_t - \sum_i \rho_i(t)\gamma_i(t).$$

那么仅当存在 γ 的某种选择使得 X，Y 和 Z 都是无漂移时，存在一鞅测度．假如

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i(t,T)\Big(\gamma_i(t) - \Sigma_i(t,T)\Big),$$

$$\beta(t,T) = \sum_{i=1}^{n}\tau_i(t,T)\Big(\gamma_i(t) - \tilde{T}_i(t,T)\Big),$$

$$\lambda_t = r_t - u_t + \sum_{i=1}^{n}\rho_i(t)\gamma_i(t),$$

鞅测度存在这一情况将会出现．在这个 $\mathbb{Q}$ 测度下

$$d_tP(t,T) = P(t,T)\Big(\sum_{i=1}^{n}\Sigma_i(t,T)\,d\tilde{W}_t^i + r_t dt\Big),$$

$$d_tQ(t,T) = Q(t,T)\Big(\sum_{i=1}^{n}T_i(t,T)\,d\tilde{W}_t^i + \Big(u_t - \sum_{i=1}^{n}\rho_i(t)T_i(t,T)\Big)dt\Big),$$

[195]

$$dC_t = C_t\Big(\sum_{i=1}^{n}\rho_i(t)\,d\tilde{W}_t^i + (r_t - u_t)dt\Big).$$

只要这个测度 $\mathbb{Q}$ 是惟一的，我们就能够套期保值．（而且如果任何 n 个可交易的美元证券的波动率向量是一可逆矩阵，那么就可得到惟一性．）一个在 T 时刻以 X 美元支付的衍生证券在 t 时刻的价值是

$$V_t = B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X \mid \mathcal{F}_t).$$

英镑投资者

英镑投资者是处于问题的另一边．他以不同的鞅测度 $\mathbb{Q}^{\pounds}$ 工作．这反映了他的计价单位是英镑现金债券 D_t 而不是美元现金债券．$\mathbb{Q}^{\pounds}$ 关于 $\mathbb{Q}$ 的 Radon-Nikodym 导数将是英镑债券的美元价值与美元计价单位的商．（为方便起见，正规化 $D_0 = 1/C_0$）那就是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\frac{d\mathbb{Q}^{\pounds}}{d\mathbb{Q}}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{C_tD_t}{B_t} = Z_t.$$

因 Z_t 有随机微分方程 $dZ_t = Z_t \sum_i \rho_i(t) d\widetilde{W}_t^i$，在$\mathbb{Q}^{\pounds}$-Brown 运动 $\widetilde{W}^{\pounds}$ 和$\mathbb{Q}$-Brown 运动 $\widetilde{W}$ 之间漂移的差正好是ρ，即

$$\widetilde{W}_i^{\pounds}(t) = \widetilde{W}_t^i - \int_0^t \rho_i(s)ds.$$

对于英镑投资者，英镑债券随机微分方程为

$$d_t Q(t,T) = Q(t,T)\left(\sum_{i=1}^{n} T_i(t,T) d\widetilde{W}_i^{\pounds}(t) + u_t dt\right),$$

这正好是 HJM 引导我们所期望的形式．

正如在 6.4 节所解释的，英镑投资者将与美元投资者在未来支付价格上达成一致．

6.6 无套利完备模型

我们已经再一次看到用于衍生证券定价和套期的相同的基本技术．首先，C-M-G 定理被用于使得贴现价格过程在新的测度下为鞅，其次鞅表示定理给出了衍生证券的一个套期保值策略．这个过程的反复出现表明可能有一个更为一般的结果支持上面所述的结论．而事实确实如此．

196

在开始这个经典定理之前，有必要把以前学习过的概念再温习一下．

- **无套利**　一个市场是无套利的，假如在此市场中不存在任何获得无风险利润的途经．一个套利机会是一个（自融资）交易策略，它以零价值开始而在 T 时刻以确定的正的价值结束．一个市场是无套利的，假如在此市场中绝对不存在任何这种套利机会．
- **完备市场**　一个市场称为完备的，假如任何可能的衍生证券权益能够通过证券的自融资资产组合交易被套期保值．
- **等价鞅测度（EMM）**　假定我们有一证券市场和在一测度$\mathbb{P}$下的一计价单位现金债券．一个 EMM 是一个等价于$\mathbb{P}$的测度$\mathbb{Q}$，在这个测度下，由债券所贴现的证券都是$\mathbb{Q}$-鞅．对于我们称之为鞅测度的东西，这正好是一个更为精确的名字．

我们已经有了二叉树模型和连续时间 Black-Scholes 模型的例子．这两个模型都是具有等价鞅测度的完备市场．虽然没有发现一个套利机会，但是也不能确定套利机会是不存在的.

在二叉树模型和连续时间 Black-Scholes 模型中我们发现，存在且仅存在一个等价鞅测度使我们能够套期保值未定权益．在多股票模型（6.3 节）中这种情形尤甚．这里我们能够发现风险 γ_t 的市场价格，但是这个价格仅当波动率矩阵 Σ_t 是可逆的才是惟一的（$\mathbb{Q}$ 也是如此）．正是这种可逆性才使我们能够套期保值．

无套利和完备性定理（Harrison 和 Pliska）

假设有一由证券及一种计价单位构成的市场．那么

(1) 市场是无套利的当且仅当至少存在一个等价鞅测度$\mathbb{Q}$;

(2) 在这种情形下，市场是完备的当且仅当正好存在一个这样的等价鞅测度$\mathbb{Q}$且不存在其他的等价鞅测度.

197

这个简单而强有力的定理使得我们的实践有意义.

在 HJM 债券市场模型中，这些条件也是可见的. 对某个可料过程$\gamma_i(t)$，这个模型需要远期利率漂移$\alpha(t,T)$满足

$$\alpha(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(t,T)(\gamma_i(t) - \Sigma_i(t,T)).$$

这就确保了存在一个等价鞅测度$\mathbb{Q}$，且γ是风险的市场价格. 现在就可以看到这能确保模型是无套利的.

另一个关键的 HJM 条件是波动率矩阵

$$(\Sigma_i(t,T_j))_{i,j=1}^{n}$$

对所有的时刻序列$T_1 < \cdots < T_n$及对所有小于T_1的t是非退化的，这意味着仅存在一个市场风险可变价格. 它是等价鞅测度是惟一的鞅测度的充分条件（实际上此条件仅仅比必要条件稍微严格一点），因此也是市场完备性的充分条件.

需要弄明白此定理有什么作用. 虽然已经完成了技术细节和精细的定义，但是能够严格地证明下面的结构.

6.6.1 鞅意味着无套利

鞅的本质确实是没有套利. 对$\mathbb{Q}$-鞅M_t的控制律是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_t \mid \mathcal{F}_s) = M_s.$$

换句话说，它是直到s时刻历史条件下的未来期望，正好等于在s时刻的值. 鞅所取的"期望"不会高于或低于它的现值. 另一方面，一个套利机会是一种赌博途径，这个途径肯定能够提高投机者的初始财富.

假定有一隐藏在自融资资产组合策略(ϕ,ψ)的套利机会.（为简化起见，假定市场是由股票S_t和债券B_t两种证券构成的.）那么它在t时刻的价值是

198

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t,$$

而且它满足自融资方程

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t.$$

能够计算资产组合$E_t = B_t^{-1} V_t$的贴现价值，而且

$$dE_t = \phi_t dZ_t,$$

这里 Z_t 是贴现股票价格 $B_t^{-1}S_t$，它是一$\mathbb{Q}$-鞅．

现在假设策略以零初始值（$V_0=0$）开始且以非负结算价（$V_T\geqslant 0$）结束．这的确能成为一套利机会吗？极为重要地，因为 Z_t 是一$\mathbb{Q}$-鞅所以 E_t 也是一$\mathbb{Q}$-鞅．这样一来

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_T\mid\mathcal{F}_0)=E_0=V_0=0.$$

但是 $V_T\geqslant 0$ 且（因为 $B_T^{-1}>0$）$E_T\geqslant 0$. 由于 E_T 的$\mathbb{Q}$-期望是零，所以 E_T 惟一可取之值也是零．

由此可以清楚地看到 V_T 也为零．任何的策略都无济于事．一个鞅本质上是一公平"博弈"且任何仅涉及进行公平博弈的策略不能保证获得一份利润．

用我们的语言来说，假如存在一个等价鞅测度，那么就不存在任何套利机会．

6.6.2 套期保值意味着价格惟一

假如我们能够套期保值，那么至多存在一个等价鞅测度．

为了看到这一点，假设能够套期保值，但是存在两个不同的等价鞅测度$\mathbb{Q}$ 和$\mathbb{Q}'$.

对于历史域$\mathcal{F}_T$ 中的任意事件 A，对于数字类权益，当事件 A 发生时它在 T 时刻支付的现金债券价值有结算 $X=B_TI_A$.（假如事件 A 发生了，示性函数 I_A 取值为 1，否则为零．）这是一有效的衍生证券，所以对它必可套期保值．（假定能够对所有的权益套期保值．）因此必存在一对 X 的自融资套期保值资产组合 (ϕ,ψ)，取值为

$$V_t=\phi_tS_t+\psi_tB_t.$$

正如通常的贴现权益 $E_t=B_t^{-1}V_t$ 满足

$$dE_t=\phi_t dZ_t,$$

199

其中 Z_t 是股票的贴现价格 $B_t^{-1}S_t$. 当$\mathbb{Q}$ 和$\mathbb{Q}'$都是等价鞅测度时，Z_t 既是$\mathbb{Q}$-鞅也是$\mathbb{Q}'$-鞅．所以 E_t 也必是如此．由此可以看到

$$E_0=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(E_T)=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}(E_T).$$

但是 E_T 正好是事件 A，I_A 的示性函数，所以 $E_0=\mathbb{Q}(A)=\mathbb{Q}'(A)$. 想找到两个不同的测度$\mathbb{Q}$ 和$\mathbb{Q}'$，但它们对事件 A 却给出相同的似然性．由 A 的任意性可知，这两个测度是完全相同的，这样$\mathbb{Q}=\mathbb{Q}'$. 假若任何两个等价鞅测度是相同的，那么实际上仅存在一个等价鞅测度．

6.6.3 Harrison 和 Pliska

我们仅仅在一个方向上证明了每一个结果．我们表明假如存在一个等价鞅测度那么就没有任何套利，但这并不表明假如不存在套利那么的确存在一等价鞅测度．我们也证明了仅有惟一的等价鞅测度存在时套期保值才可能发生，但并不是说等价鞅测度的惟一性迫使套期保值成为可能．

在离散情况下所有这些结果的完整和严格的证明参见由 Michael Harrison 和 Stanley Pliska

撰写的发表在 *Stochastic Processes and their Applications* 学术杂志上的论文，论文名为 Martingales and Stochastic integrals in the theory of continuous trading（更多的细节参阅本书附录 1）．对于连续时间情形及更为高等的模型，还有其他的研究工作，值得一提的是 Delbaen 和 Schachermayer 的工作．但是这方面日益完善的技术并不影响我们对 Harrison 和 Pliska 真知卓见的欣赏．

200

附录1　进一步的阅读

参考书列得越多，实际上能参考的就越少. 下面的这个书目较短，希望此时有较少的目录反而提供更多的选择.

概率和随机微积分的书

- *A first course in probability*, Sheldon Ross, Macmillan (4th edition 1994, 420 pages)
- *Probability and random processes*, Geoffrey Grimmett and David Stirzaker, Oxford University Press (2nd edition 1992, 540 pages)
- *Probability with martingales*, David Williams, Cambridge University Press (1991, 250 pages)
- *Continuous martingales and Brownian motion*, Daniel Revuz and Mark Yor, Springer (2nd edition 1994, 550 pages)
- *Diffusions, Markov processes, and martingales: vol.* 2 Itô *calculus*, Chris Rogers and David Williams, Wiley (1987, 475 pages)

这些书技术上的深度和难度是逐渐递增的(最后两本书处于同一水平)而且包含了第1、2和3章使用的概率知识. Ross的书是对事件、似然、分布和期望等基本静态概率思想的介绍. Grimmett和Stirzaker的书的前半部分包含了以上内容及随机过程的发展, 而这些过程的发展概况包括一些关于鞅和Brown运动的基本内容.

Probability with martingales 不仅奠定了积分、(条件)期望和测度的基础, 也对鞅的理论作了精彩的介绍. 书中也有一章介绍了简单的表示定理和Black-Scholes的离散版本.

Revuz和Yor, 及Rogers和Williams的两本书提供了随机微积分的技术细节. 其内容都包含我们所需要的所有工具. 比如随机微分, Itô公式, Cameron-Martin-Girsanov测度变换及表示定理. 虽然内容较深, 但具有一定背景知识的读者将发现它们是值得一读的, 从而了解随机分析中有价值的问题.

金融方面的书

- *Options, futures, and other derivative securities*, John Hull, Prentice-Hall (2nd edition 1993, 490 pages)
- *Dynamic asset pricing theory*, Darrell Duffie, Princeton University Press (1992, 300 pages)
- *Option pricing: mathematical models and computation*, Paul Wilmott, Jeff Dewynne and Sam Howison, Oxford Financial Press (1993, 450 pages)

Hull的书是一本受实际工作人员欢迎的书. 在开始分析之前, 该书列出了现实世界中各

种各样的期权合约及市场. 该书讨论了许多模型, 且包含了实用的数值程序. 该书另一个有用的特征是每章都配有参考文献.

Duffie 的书是数学上更加严格的教科书, 但仍然可以接受和理解. 该书包含关于均衡定价和最优资产组合选择的章节, 以及与本书处理路线相同的连续时间无套利定价. 对于具有数学背景的读者, 这是一个好的选择.

牛津出版社金融专辑涉及到的课题纯粹从微分方程的框架出发而且没有使用随机技术. 最后, 许多定价问题变成了微分方程问题. 但是除非一个读者在这个领域有实践经验, 否则首次学习数学金融学领域的读者没必要从阅读这本书开始.

第 4 章: 市场证券的定价

一些著名的学术期刊论文包括:

- The pricing of options and corporate liabilities, F Black and M Scholes, *Journal of Political Economy*, **81** (1973), 637—654.
- Theory of rational option pricing, R C Merton, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4** (1973), 141—183.
- Foreign currency option values, M B Garman and S W Kohlhagen, *Journal of International Money and Finance*, **2** (1983), 231—237.
- *Options markets*, J C Cox and M Rubinstein, Prentic-Hall (1985, 500 pages).
- Two into one, M Rubinstein, *RISK*, (May 1991), p. 49.

Black-Scholes 的论文现在是具有历史意义的. 虽然针对本论文的技术细节, 我们更欣赏作者的洞察力, 但是看到这个课题是怎样开始的仍然是富有吸引力的. 当时他们关心的是具有突出债务的公司股票的定价(诸如公司证券或认股权证), 这里这些债务涉及期权和衍生证券.

几乎同时期, Merton 对 Black-Scholes 公式提供了一个更为严格的处理, 而且对支付红利的股票和挡板期权做了推广. Garman 和 Kohlhagen 描述了汇率期权, 而后 Cox 和 Rubinstein 在繁多的期权品种类中讨论了一些奇异期权公式. Rubinstein 在 *RISK* 期刊上发表的文章是关于双重货币工具和交叉货币金融工具的.

第 5 章: 利率

在利率环境下, Heath-Jarrow-Morton 如同 Black-Scholes 一样是一开创性的工作. 通过集中在远期利率尤其是给出一细致的随机处理, 它们提供了最为一般(有限)可能的 Brown 利率模型. 其他的模型可能名称不同, 但它们正好是具有不同记号的 HJM 模型. 这篇文章值得读者反复阅读.

- Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology for contingent claims valuation, David Heath, Robert Jarrow and Andrew Morton, *Econometrica*, **60** (1992), 77—105.

除了 HJM 的论文，关于各种各样利率市场模型的著名论文还有：

- Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, T S Y H_0 and S-B Lee, *Journal of Finance*, **41** (1986), 1011—1029.
- An equilibrium characterization of the term structure, O A Vasicek, *Journal of Finance*, **5** (1977), 177—188.
- Pricing interest rate derivative securities, J Hull and A White, *The Review of Financial Studies*, **3** (1990), 573—592.
- A theory of the term structure of interest rates, J C Cox, J E Ingersoll and S A Ross, *Econometrica*, **53** (1985), 385—407.
- Bond and option pricing when short rates are lognormal, F Black and P Karasinski, *Financial Analysts Journal*, (July-August 1991), 52—59.
- The market model of interest rate dynamics, A Brace, D Gatarek and M Musiela, *UNSW Preprint*, Department of Statistics S95-2.
- Which model for the term-structure of interest rates should one use?, L C G Rogers, in *Mathematical Finance*(ed. M H A Davis, D Duffie, *et al.*), IMA Volume 65, Springer-Verlag, 93—116.

这里的最后一篇文章是模型及它们的性质的综述性文章，而其他的文章分别描述了在这一章所考虑的所有主要模型.

第 6 章：更一般的模型

- Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Michael Harrison and Stanley Pliska, *Stochastic Processes and their Applications*, **11** (1981), 215—260.
- The fundamental theorem of asset pricing, F Delbaen and W Schachermayer, *Mathematische Annalen*, **300** (1994), 463—520.
- The valuation of options for alternative stochastic processes, J C Cox and S A Ross, *Journal of Financial Economics*, **3** (1976), 145—166.

Harrison 和 Pliska 在一般框架下通过将无套利和一个鞅测度的存在性相联系，朝前推进了一步，而且表明是否能够套期保值依赖于测度存在性和惟一性. 这个思想奠定了今天金融数学的许多内容基础，这是这一篇文章的重要性所在.

Delbaen 和 Schachermayer 对类似的情形进行了探讨，但是以一个更为技术性的方法去处理连续时间过程的特别问题，包括不连续过程. Cox 和 Ross 讨论了比 Black-Scholes 更为一般的模型的期权定价，这些模型包括支付红利的情况.

附录 2　记　号

可以将记号自然地分成三个部分：小写字母（一般是确定的），大写字母（一般是随机的），以及希腊字母.

小写字母

记号	含义
a	一个（实的）参数
c	一个常数；息票率
$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$	$\mathbb{Q}$ 关于 $\mathbb{P}$ 的 Radon-Nikodym 导数
dt	无穷小时间增量
dW_t	无穷小 Brown 增量
f	一个函数
$f_{\mathbb{P}}(x)$	关于测度 $\mathbb{P}$ 的概率密度函数
$f(t,T)$	债券的远期利率
g	一个函数
$g(x,t,T)$	函数 $(-\log P(t,T) \mid r_t = x)$
i	一个整数
j	一个整数
k	合约敲定/执行价格，一个整数，一个补偿
n	一个整数
$n[t]$	在 t 时刻支付的红利数量
p, p_j	一个概率
q, q_j	一个概率
r	常值利率
r_t	可变利率过程，瞬时利率
s	股票的初始价格，时间变量的另一种表达方式
s_j	离散股票过程的可能价值
t	时间
u	外币利率，实变量
x	一个实变量，横坐标变量
$x_t(t)$	波动率曲面的依赖于时间的因子
$y_t(T)$	波动率曲面的依赖于到期日的因子

大写字母

记号	含义
A	一个事件，一个常数
A_t	HJM 波动率矩阵
B_i, B_t	债券价格过程
$B(t,T)$	Riccati 方程的解
C_t	汇率，息票债券价格，计价单位
D_t	融资缺口
D_t	外币现金债券
$D(t,T)$	Riccati 方程的解
$\mathbb{E}$	数学期望算子
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$	测度 $\mathbb{P}$ 下的数学期望
E_t	贴现资产组合价值过程
F	远期价格
$F_s(t,T)$	$P(t,T)$ 在时刻 s 的远期价格
F_Q	互换货币合约的远期价格
$\mathcal{F}_i$	离散股票过程直到决算时刻 i 的历史
$\mathcal{F}_t$	Brown 运动截至 t 时刻的历史
I_A	事件 A 的示性函数
$I(t)$	下次息票支付的序列数
K	期权敲定价格
$L(T)$	LIBOR 拆借利率
$L(t,T)$	远期 LIBOR 拆借利率
M_t	一个鞅

N_t	一个鞅
$\mathbb{N}$	非负整数集{0,1,2,…}
$N(\mu,\sigma^2)$	均值为μ方差为σ^2的正态随机变量
P	假设的离散衍生证券价格
$\mathbb{P}$	一个概率测度
$\mathbb{P}_T$	远期测度
$P(t,T)$	债券价格
$\mathbb{Q}$	一个概率测度
$\mathbb{R}^n$	n-维实向量空间
$R(t,T)$	债券收益率曲面
S_t,S_t	股票价格过程
$\tilde{S}_t$	可交易资产价格
$S_t^1,\cdots,S_t^n$	股票价格过程
T	一个衍生证券的到期/执行时间
T_i	息票支付时间
U_t	外币衍生价值过程
V	衍生证券价值
V_t	衍生证券价值过程
$V(s,T)$	Black-Scholes 期权价格
$W_n(t)$	随机徘徊
W_t	Brown 运动
$\tilde{W}_t$	Brown 运动
$W_t^1,\cdots,W_t^n$	独立 Brown 运动
X	随机变量，一个衍生证券的权益价值
X_i	随机变量序列
X_t	一个随机过程
Y_t	一个随机过程
$Y_t(t,T)$	γ_t 在$[t,T]$上的积分
Z	一个(正态)随机变量
Z_t,Z_t	贴现股票价格过程
$Z(t,T)$	贴现债券价格
$\tilde{Z}_t$	贴现可交易资产价格

希腊字母

α	一个实参数
$\alpha(t,T)$	远期利率漂移
$\beta(t,T)$	一个两变量函数(Vasicek 模型)
γ_t	测度漂移变换，风险的市场价格，风险溢价
$\gamma_i(t,T)$	BGM 波动率曲面
δ	红利收益；息票支付区间
δt	一个小的时间增量
$\delta s_i,\delta n_i$	分支宽度
$\Delta S_t,\Delta V_t$	S_i,V_i 相应于时间增量 δt 的价值变化
ζ_t	测度过程变换
θ	一个实变量
θ_t	确定的漂移函数
λ	一个实参数
μ	常值股票漂移
μ_t	可变股票漂移过程
ν_t	股票漂移过程
π_t	轨道概率
Π_t	资产组合
ρ	相关系数
$\bar{\rho}$	正交补$\sqrt{1-\rho^2}$
ρ_t	波动率过程
σ	常值股票波动率
σ_1,σ_2	股票波动率
σ_t	可变股票波动率过程
$\sigma(t,T)$	远期利率波动率曲面
$\sigma_i(t,T)$	多因子远期利率波动率曲面
σ	期限波动率
Σ_t	波动率矩阵
$\Sigma(t,T)$	债券价格波动率
τ	时域水平，到期日，停时
$\phi_t,\tilde{\phi}_t$	持股策略，表示定理中的被积项
Φ	正态分布函数：$\Phi(x)=\mathbb{P}(N(0,1)\leqslant x)$
Ψ_t	持有债券交易策略
ω	一个样本轨道

附录 3　习题解答

2.1　期货合约（在到期日）的价值是股票价格减执行价格．假如过程移到节点 2，股票价格是 s_2，所以期货的价值是 $f(2)=s_2-k$. 其他的节点是类似的．那么，回想 q 是 $(s_1\exp(r\delta t)-s_2)/(s_3-s_2)$，

$$V=\exp(-r\delta t)((1-q)(s_2-k)+q(s_3-k))$$
$$=\exp(-r\delta t)\left(s_2\frac{s_3-s_1e^{r\delta t}}{s_3-s_2}+s_3\frac{s_1e^{r\delta t}-s_2}{s_3-s_2}-k\right).$$

上面等式的右边等于 $e^{-r\delta t}(s_1e^{r\delta t}-k)$，从而能够将上式简化为 $V=s_1-ke^{-r\delta t}$. 这样给出期货零现值的惟一敲定价格是 $k=s_1\exp(r\delta t)$.

2.2　在第一种场景下，股票价格和套期策略的进程标在表 A-1 中，而且图 A-1 标出了期权树．其他情形见相应的表格（表 A-2）．期权在零时刻的价格是50．我们能够用截止时刻为 2 的树表示套期策略 φ，每一个节点给出了在下一投资周期开始时应持有的股票的量．相应的树在图 A-2 中给出．

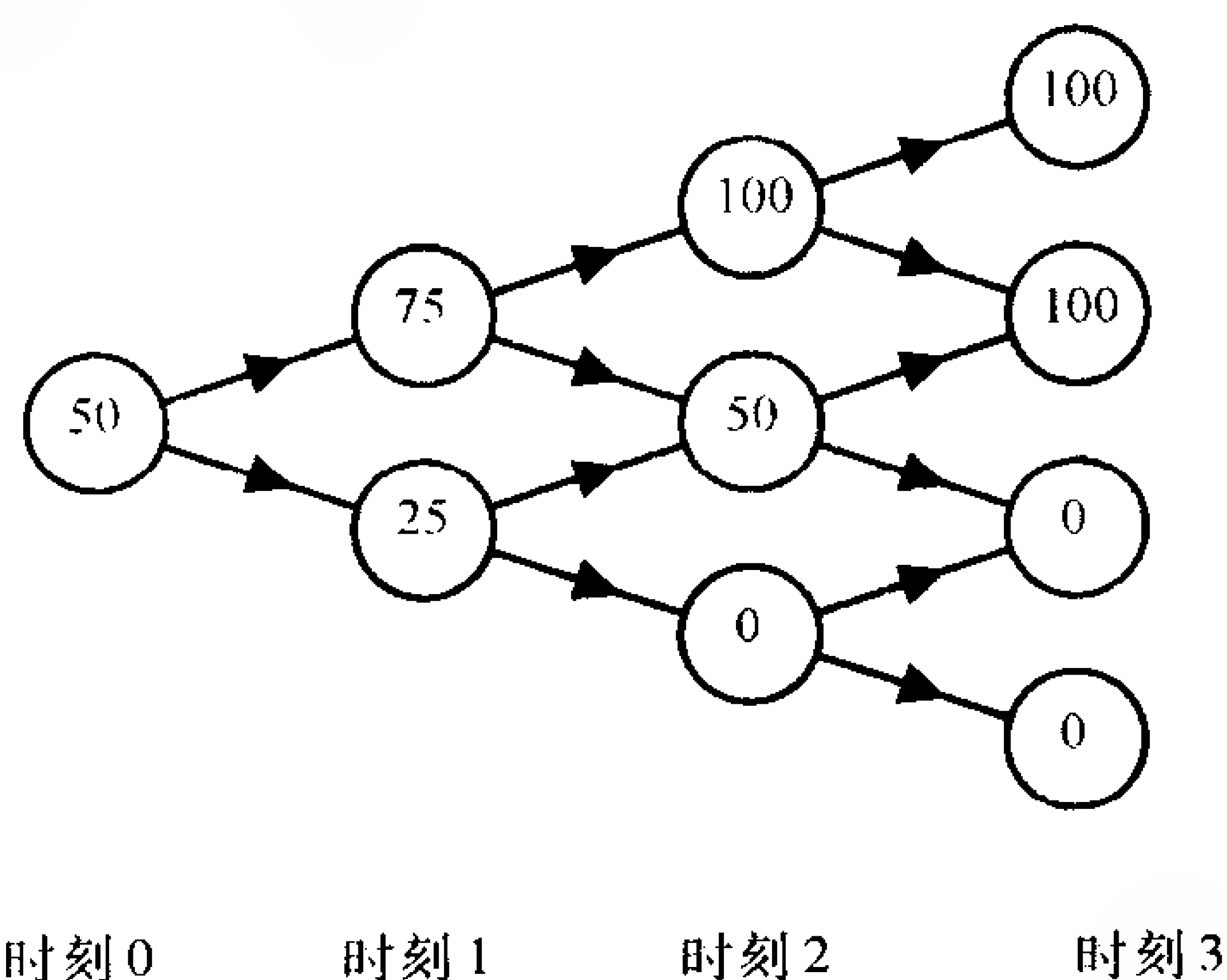


图 A-1　一个数字期权支付的期权权益树

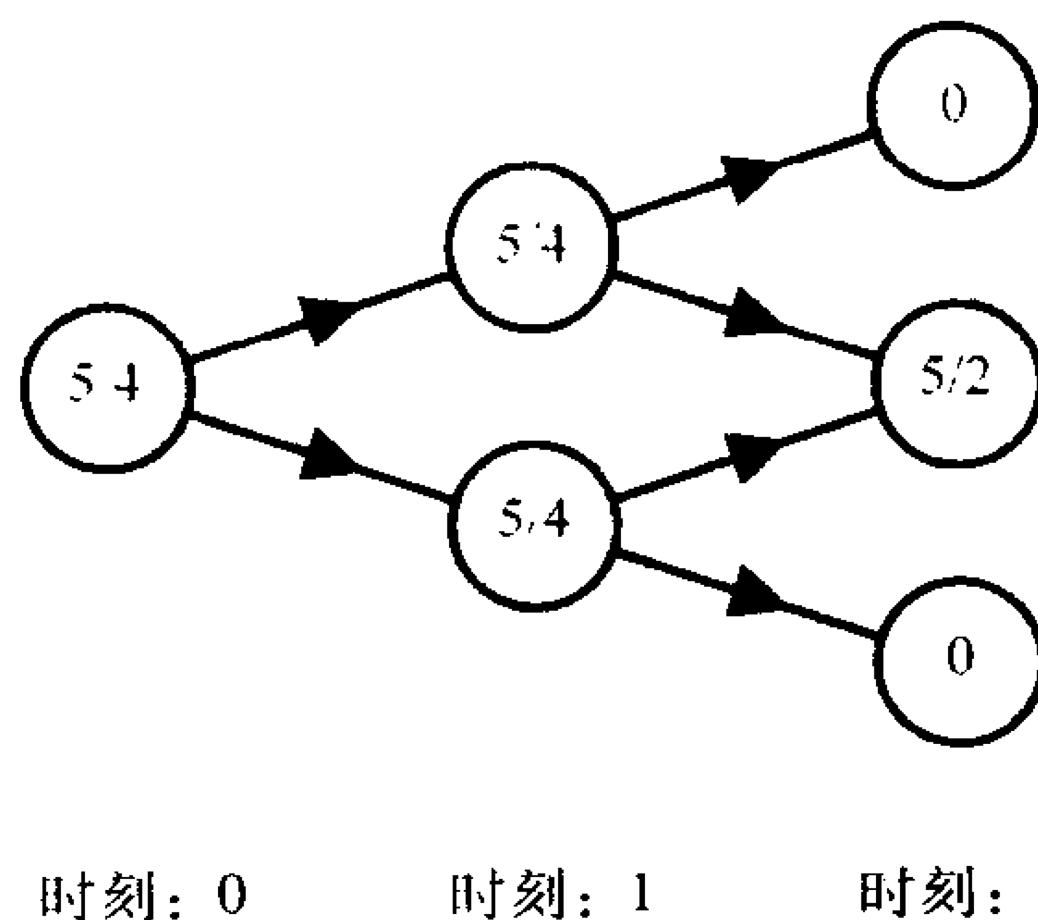


图 A-2　套期保值树

表 A-1　期权和资产组合的发展—价内

时　间　i	上一次跳跃	股票价格 S_i	期权价值 V_i	股票持有 ϕ_i	债券持有 ψ_i
0	–	100	50	–	–
1	上升	120	75	1.25	−75
2	上升	140	100	1.25	−75
3	下降	120	100	0.00	100

表 A-2　期权和资产组合的发展——价外

时　间　i	上一次跳跃	股票价格 S_i	期权价值 V_i	股票持有 ϕ_i	债券持有 ψ_i
0	–	100	50	–	–
1	下降	80	25	1.25	−75
2	上升	100	50	1.25	−75
3	下降	80	0	2.50	−200

2.3　表 A-3 中的计算，表明$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_i)$等于 S_i. 应用塔式定律的附注可知 S_i 是一$\mathbb{Q}$-鞅.

表 A-3　关于过滤族值的条件数学期望

期　　望	过 滤 族	值
$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_0)$	{1}	$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot 180+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot 80+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 72\cdots+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 36=80$
$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_1)$	{1, 3}	$\frac{2}{5}\cdot 180+\frac{3}{5}\cdot 80=120$
	{1, 2}	$\frac{2}{3}\cdot 72+\frac{1}{3}\cdot 36=60$
$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 \mid \mathcal{F}_2)$	{1, 3, 7}	180
	{1, 3, 6}	80
	{1, 2, 5}	72
	{1, 2, 4}	36

3.1　否. 增量是错的（或等价地条件期望是错的）. 增量 $X_{s+t}-X_s$ 是一正态随机变量，方差为$t-2s(\sqrt{1+t/s}-1)$，而不是 t，而且增量不独立于 X_s.

3.2　对. 增量 $X_{s+t}-X_s$ 是正态变量 $N(0,t\rho^2)$ 与一个独立正态变量 $N(0,\ t(1-\rho^2))$ 的和，等于正态变量 $N(0,t)$. 增量确定地独立于历史$(W_u:u\leqslant s)$和$(\widetilde{W}_u:u\leqslant s)$，因此也独立于历史$(X_u:u\leqslant s.)$

3.3　当 S_T 是均值为μT 且方差为 $\sigma^2 T$ 的正态随机变量时，该随机变量取负值的概率与正态随机变量 $N(0,1)$小于 $-\mu\sqrt{T}/\sigma$ 的概率是一样的. 这个概率是正的.

3.4 $dX_t = \exp(W_t)dW_t + \frac{1}{2}\exp(W_t)dt = X_t dW_t + \frac{1}{2}X_t dt.$

3.5 $X_t = X_0\exp\left(\sigma W_t + \int_0^t \mu_s ds - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right).$

3.6 我们知道可以将过程写为 $dB_t = \beta_t dt$ 和 $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$. 那么

$$d(B_t X_t) = \frac{1}{2}d((B_t + X_t)^2 - B_t^2 - X_t^2),$$

由 Itô 公式，上式右边等于

$$(B_t + X_t)(dB_t + dX_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt - B_t dB_t - X_t dX_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt .$$

上式本身可简化为所期望的答案. 另外应用乘积律也能立即给出所求的解.

3.7 对 $t=2$ 公式成立（由定义）. 在时刻 $t=1$，假如第一次跳跃是‘上升’，那么 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ 以 $\mathbb{P}$-概率 p_2 将是 q_1q_2/p_1p_2，且以 $\mathbb{P}$-概率 $\bar{p}_2$ 将是 $q_1\bar{q}_2/p_1\bar{p}_2$. 这样（条件）期望是 $q_1q_2/p_1 + q_1\bar{q}_2/p_1 = q_1/p_1$. 假如第一次跳跃是‘上升’，这正好是 ζ_1 的值. 第一次跳跃是‘下降’的情况是类似的.

在时刻 $t=0$，$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(1) = 1$. 正如我们所期望的，这与 ζ_0 匹配.

3.8 我们不得不对所有的 s 和 t（$s \leqslant t$），且对所有可能的 X_t，证明这个结果. 首先注意到 $s=0$ 的情况马上可以从事实 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X\right)$ 得到，且 ζ_t 在时刻 t 为 $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. $s=t$ 的情况也是平凡的，因为结果的两边都是 X_t. 所以事实上，对 X_2 的四个情形，我们仅需检验情形 $s=1$，$t=2$. 考察 X_2 是数字未定权益的情形，这里假如过程上升两次，这个权益仅支付 1. 假如第一次跳跃下降，因为 X_2 和 $\zeta_2 X_2$ 必都为零，那么结果的两边都是零. 假如第一次跳跃上升，那么左面是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_2 \mid \mathcal{F}_1) = q_2(1) + \bar{q}_2(0) = q_2.$$

右边是

$$\zeta_1^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_2 X_2 \mid \mathcal{F}_1) = \frac{p_1}{q_1}\left(p_2\left(\frac{q_1q_2}{p_1p_2}1\right) + \bar{p}_2(0)\right) = q_2.$$

类似地，我们能够检验以下数字未定权益，这里 X_2 仅在一次上升，一次下降，和一次下降－再下降后才实施支付. 这就完成了证明.

3.9 (ii) 和 (ii)′ 的等价性立即可以从关于等价正态的定理得到. (iii) 和 (iii)′ 的等价性也是如此，只要我们注意到 (iii)′ 的右边独立于历史 $\mathcal{F}_s$.

我们也注意到当 $s=0$ 时 (ii)′ 正好是 (iii)′ 的特殊情况. 所以只要证明 (iii)′ 就足够了. 左边是

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(W_{t+s}-W_s+\gamma t))\mid\mathcal{F}_s)$$
$$=\zeta_s^{-1}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\zeta_{t+s}\exp(\theta(W_{t+s}-W_s+\gamma t))\mid\mathcal{F}_s)$$

这里，$\zeta_t=\mathbb{E}_P\left(\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\mid\mathcal{F}_t\right)$. 由 $\mathbb{P}$-Brown 运动 W 的性质（iii），$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}=\exp\left(-\gamma W_t-\frac{1}{2}\gamma^2T\right)\exp(-\gamma(W_T-W_t))$，这里 W_T-W_t 是一独立于$\mathcal{F}_t$ 的正态随机变量，由此得到 $\zeta_t=\exp\left(-\gamma W_t-\frac{1}{2}\gamma^2T\right)\exp\left(\frac{1}{2}\gamma^2(T-t)\right)$，这正好是

$$\zeta_t=\exp\left(-\gamma W_t-\frac{1}{2}\gamma^2t\right).$$

这样一来（iii）′ 的左边变为

$$\exp\left(\theta\gamma t-\frac{1}{2}\gamma^2t\right)\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\exp((\theta-\gamma))W_{t+s}-W_s))\mid\mathcal{F}_s).$$

再次使用 $W_{t+s}-W_s$ 是一独立于$\mathcal{F}_s$ 的正态随机变量 $N(0,1)$ 这一事实，上面的期望部分等于 $\exp\left(\frac{1}{2}(\theta-\gamma)^2t\right)$，这意味着整个的表达式确定如所期望的等于 $\exp\left(\frac{1}{2}\theta^2t\right)$.

3.10 假如 $\gamma=0$，那么 $X_t=W_t$，由例（2）我们知道这是一个鞅. 可是，假如 γ 不是零，那么

$$\mathbb{E}(X_t\mid\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(W_t\mid\mathcal{F}_s)+\gamma t=W_s+\gamma t=X_s+\gamma(t-s).$$

假如 γ 不是零，那么 X 不是一个鞅，因为有上面额外的项 $\gamma\ (t-s)$.

3.11 函数 σ 是有界的，即存在一个常数 K 使得对所有的 $t\leqslant T$ 及所有的 Ω 中的 ω，$|\sigma(t,\omega)|\leqslant K$. 那么对所有的 ω，$\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\sigma_s^2\mathrm{d}s\right)$ 有上界 $\exp\left(\frac{1}{2}K^2T\right)$，所以它的期望也以这个常数为界. 由第二收集材料的指导框，局部鞅也必是一鞅.

3.12 对 $V_t=W_t^2-t$ 求微分，我们能够分别处理 W_t^2 和 $-t$ 这两个项. 对 $f(x)=x^2$ 应用 Itô 公式，有 $X_t=W_t$，我们能够处理这其中的第一项. 那么

$$\mathrm{d}(f(W_t))=f'(W_t)\mathrm{d}W_t+\frac{1}{2}f''(W_t)\mathrm{d}t=2W_t\mathrm{d}W_t+\mathrm{d}t.$$

又 $\mathrm{d}(-t)=-\mathrm{d}t$，所以可以导出 $\mathrm{d}V_t=2W_t\mathrm{d}W_t$. 事实上，$V_t$ 是一恰当的鞅，因为假如令 X 是 $\left(\int_0^TW_t^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$，那么这足以证明（收集材料的指导）$\mathbb{E}(X)<\infty$. 事实上

$$(\mathbb{E}(X))^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)=\int_0^T\mathbb{E}(W_t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}T^2.$$

3.13 假如设 L_t 是 Z_t 的对数，那么 $L_t=\sigma W_t+(\mu-r)t$，这样 $dL_t=\sigma dW_t+(\mu-r)dt$. 由 Itô 公式既可得到表达式.

3.14 假如我们变换积分中的变量到 $v=-(x+\frac{1}{2}\sigma^2T)/\sigma\sqrt{T}$，那么 V_0 是

$$V_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}(se^{-\sigma\sqrt{T}v-\frac{1}{2}\sigma^2T}-ke^{-rT})e^{-\frac{1}{2}v^2}dv,$$

这里 a 是常数 $\left(\log\frac{s}{k}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T\right)/\sigma\sqrt{T}$. 通过将 $\exp\left(-\sigma\sqrt{T}v-\frac{1}{2}\sigma^2T-\frac{1}{2}v^2\right)$ 写为 $\exp\left(-\frac{1}{2}(v+\sigma\sqrt{T})^2\right)$，可将积分重写为

$$V_0=\frac{s}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a+\sigma\sqrt{T}}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv-\frac{ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{1}{2}v^2}dv.$$

进而可写为

$$V_0=s\Phi(a+\sigma\sqrt{T})-ke^{-rT}\Phi(a),$$

这正是我们所寻找的表达式.

3.15 我们需要知道漂移是常数. 至此，我们仅能够用3步法去掉常数漂移项. 稍后（6.1节）将推广这一结果，但是此时需要漂移是常数，即使并不区别它是哪个常数.

3.16 用 $s=\$10$，$k=\$12$，$\mu=0.15$，$\sigma=0.20$，$r=0.05$ 和 $T=1$ 简单地计算 Black - Scholes 公式. 期权的价值是 \$0.325.

3.17 考虑下面的情形，假如 $S_T>\$10$，那么 X 为 \$1，否则 X 为零，这里 T 是1. 因此由衍生证券定价公式

$$V_0=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(B_T^{-1}X)=e^{-rT}\mathbb{Q}(S_T>\$10)=e^{-rT}\Phi\left(\frac{rT-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

它的数值为 \$0.532.

4.1 （i）资产的贴现价值是 $Z_t=B_t^{-1}X_t=\exp(2\sigma\tilde{W}_t+(r-\sigma^2)t)$. 它的随机微分方程是 $dZ_t=Z_t(2\sigma d\tilde{W}_t+(r+\sigma^2)dt)$，它有一非零的漂移项. 所以 Z_t 并不是一个 $\mathbb{Q}$ - 鞅，这样 X_t 并不是一可交易的资产.

（ii）在这种情况下，资产的贴现价值是 $Z_t=B_t^{-1}X_t=\exp(-\alpha\sigma\tilde{W}_t-\alpha rt)$. 给定 $\alpha t=\frac{1}{2}(\alpha\sigma)^2$，$Z_t$ 的随机微分方程是 $dZ_t=Z_t(-\alpha\sigma d\tilde{W}_t)$，它是一 $\mathbb{Q}$-鞅. 所以 X_t 是可交易的.

4.2 用 $d\tilde{W}_i(t)-\gamma_i(t)$ 替代每一个 $dW_i(t)$ 且代入关于 dY_t 和 dZ_t 的随机微分方程，

就可看到漂移项为零.

4.3 这个例子与课本中英镑情形的惟一差别是汇率是另外一种方法. 在有英镑对美元汇率（根据国内条款交易国现金流的价值）之前，我们也有美元对日元的汇率（根据交易国条款国内现金流的价值）. 我们实际上是用 C_t^{-1} 替代 C_t 工作，但是惟一的差别是相关变化的符号. 这样远期价格是 $F_0=\exp(\rho\sigma_1\sigma_2)F$，而且不是 $F_0=\exp(-\rho\sigma_1\sigma_2)F$，其中 F 是当地货币远期 $F=e^{uT}S_0$. 因为汇率倾向于以‘大’数报价，在任何特别情况下所需要的 ρ 的符号依赖于问题中实际的货币对.

附录4　技术术语词汇

Adapted（适应的）

一个过程仅依赖于当前的位置和其驱动过程过去的运动轨迹．它不能看到未来．

American call option（美式买入期权、美式看涨期权）

一个在期权到期日之前任意时刻可以执行的买入期权．

Arbitrage（套利）

在市场上用一种交易或一系列交易能肯定地获得无风险利润的策略．

Arbitrage free（无套利）

一个不存在任何无风险利润机会的市场．

Arbitrage price（套利价格）

证券的不允许任何套利机会的惟一价格．

Autoregressive（自回归）

一个向均值回归的过程．

Average（平均）

样本的算术平均．

Bank account process（银行账户过程）

一个账户，它由现行的瞬时利率复合构成，其行为像现金债券．

Binomial process（二叉树过程）

定义在一个二叉树上的过程．

Binomial representation theorem（二项式表示定理）

在二叉树上鞅表示定理的离散版本．

Binomial tree（二叉树）

一个树，它的每一个节点在下一阶段分成两个状态．

Black-Scholes（Black-Scholes 模型）

具有解析期权定价公式的股票市场模型．

Bonds（债券）

拥有利息的证券，它能够作正规的利息支付或者在到期时作整笔付息．

Bond options（债券期权）

在未来某一时刻买进或者卖出一种债券的一种期权．

Brownian motion（Brown 运动）

通过取越来越细小的随机游动所形成的基本的随机过程．它是一具有零漂移和单位波动率的鞅，且不是通常牛顿意义下可微的．

Calculus（微积分）

一般地指一个计算体系，着重分析因变量的无穷小变化而导致的函数行为．牛顿微积分处理光滑函数，但是 **Brown** 运动不是这样，它要求随机微积分的技术．（微积分（calculus）的拉丁文意指算盘上使用的算珠）．

Call option（买入期权、看涨期权）

一种以现在约定的价格在未来某一日期买入一种证券的选择权．

Cameron-Martin-Girsanov theorem（Cameron-Martin-Girsanov 定理）

当变换 **Brown** 运动漂移时，解释等价测度变换的一个结果．

Cap（上限）

当现金利率收益和开始时刻确定的利率之间的差额为正时，定期地支付这一差额的一份合约．可用一个上限来保护一位借款者以防止浮动利率太高．

Caplet（单期上限）

以某一常值支付的一份红利上限．

Cash bond（现金债券）

一种流动地支付连续复利的债券，它以瞬时利率计算收益．

Central limit theorem（中心极限定理）

一个统计结论，它陈述独立同分布的（**IID**）随机变量的一个样本轨道的平均值是渐近正态分布的．

Change of measure（测度变换）

考察在不同的似然集下的相同的随机过程，各种发生事件的概率的变化．

Claim（权益）

根据一份合约而确定的在未来所作的一份支付．

Commodity（商品）

一种实际的物品，诸如黄金、石油或者冰冻浓缩橙汁．

Complete market（完备市场）

每一种权益都可套期保值的市场．

Conditional distribution（条件分布）

一个随机变量以某些信息$\mathcal{F}$为条件下的分布，诸如$\mathbb{P}(X\leqslant x\mid \mathcal{F})$．

Conditional expectation（条件期望）

对给定某已知历史所取的期望．比如在三次掷硬币中，假定第一次掷出正面，这三次出现正面数目的条件期望是2；而无条件期望仅仅是1.5．以过程截至时刻t的历史为条件的条件期望记为$\mathbb{E}(\cdot\mid\mathcal{F}_t)$．

Contingent claim（未定权益）

一种权益，它的量由市场证券直到这个权益被实施时刻为止的行为所确定．

Continuous（连续）

一个过程或函数，当它的变量或参数获得无穷小改变时，它仅获得一个小的量的变化．

Continuous-time（连续时间）

一个过程，它依赖于一个实值的时间参数，并允许时间无限可分.

Continuously compounded（连续复利）

利息被即时地计算复利，而不是每年或每月地计算复利，导致利息指数型增长.

Contract（合约）

两个当事人，或两个参与者之间在法律框架下达成的协议.

Correlation（相关系数）

表示两个随机变量线性依赖性的一种度量. 假如当一个变量变大时，另一个变量也变大，则相关系数是正的；假如当一个变量变大时，另一个变量变小，则相关系数是负的. 正1及负1的极端情形对应于完全相关，而相互独立变量之间的相关系数为零. 相关系数计算公式是随机变量的协方差除以它们各自方差乘积的平方根.

Coupon（息票）

由一债券所作的周期性的支付.

Covariance（协方差）

表示两个随机变量联系程度的一种度量，假如变量是独立的则协方差为零（对联合正态随机变量逆命题也成立）. 两个变量的协方差计算公式是它们乘积的期望减去它们期望的乘积.

Cumulative normal integral（累积正态积分）

参考正态分布函数.

Currency（货币）

一个国家或一国家群体的金钱单位.

Default free（无违约）

不存在债券发行人不能够兑现它的金融保证（理论上使用的）的可能.

Density（密度）

概率密度函数 f 是一个连续随机变量分布函数的导数（如果它存在的话）. 直观地，$f(x)dx$ 是 X 落在区间 $[x, x+dx]$ 的概率. 函数 f 是非负的、积分为1且能够被用于计算数学期望等等，如

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivative（衍生证券）

一种证券，它的价值依赖于已存在的标的市场证券（或由之导出）. 也可参见未定权益.

Difference equation（差分方程）

微分方程在离散情形下的对应物. 例如，发现一个序列 (x_n) 它满足

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = d.$$

Diffusion（扩散）

一种随机过程，它是一随机微分方程的解.

Digital（数字权益）

一种衍生证券，假如一给定的未来事件发生了，它将支付一给定的量，否则什么也不支付.

Discount（贴现）

对一个未来的收益或成本按一定比例缩小作为现值以反映现在比未来的更重要（考虑了时间的成本）.

Discount bond（贴现债券）

一种债券，它许诺在未来某一时日作一整笔的支付，但是到那时之前它的价值小于它的面值.

Discrete（离散）

取不同的分离的值，诸如从集$\mathbb{N}$或$\{0,\delta t,2\delta t,\cdots\}$中取值.

Distribution（分布）

一个随机变量每一可能似然值的描述.

Distribution function（分布函数）

一个随机变量的（累积）分布函数F，其定义为使得$F(x)$是随机变量不大于x的概率.函数从0（弱）递增到1. 假如$F(x)$是可微的，那么它的导数就是密度函数.

Dividends（红利）

由一权益所给出的正常的且可变的支付.

Doléans exponential（Doléans 指数）

对于一局部鞅M_t，它是随机微分方程$dX_t = X_t dM_t$的解，而X_t是另一种局部鞅$X_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\int_0^t (dM_s)^2\right)$.

Drift（漂移）

一个随机过程中dt项的系数.

Driftless（无漂移）

具有常值零漂移项的过程.

Equilibrium distribution（均衡分布）

一个过程的分布，它在时间演化下是稳定的.

Equities（股权）

支付红利的股票.

Equivalent martingale measure（EMM）（等价鞅测度）

参见鞅测度.

Equivalent measures（等价测度）

两个测度$\mathbb{P}$和$\mathbb{Q}$是等价的，如果它们有相同的零概率事件.

European call option（欧式买入期权、欧式看涨期权）

一种买入期权，它仅能够在期权到期日执行或不执行. 试同美式买入期权相比较.

Exercise date（执行日期，到期日）

一个设置的未来时日，在这个时日能够执行或不执行期权.

Exercise price（执行价格）

参见敲定价格

Exotics（奇异期权）

新的衍生证券，它要么迅速地变为标准的期权产品或者变得无任何功能.

Expectation（数学期望）

一个随机变量的均值,它是无限个相同试验平均值的极限.对于离散和连续随机变量(具有密度f)它分别是

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(X = n), \quad \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exponential Brownian motion（指数 Brown 运动）

一个过程，它是一个带漂移的 **Brown** 运动的指数.

Exponential martingales（指数鞅）

一个鞅的 **Doléans** 指数，它本身也是一个（局部）鞅.

Filtration（过滤族）

一个过程的历史（$\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$，这里$\mathcal{F}_t$是截至时刻t过程轨道的信息.

Fixed（固定利率）

一种利率，该利率在整个合约的期限内都为常数.

Floation（浮动利率）

一种利率，该利率在整个合约的期限内随市场情况而变动.

Floor（下限）

当开始时刻确定的利率和当前利率收益之间的差额为正时，周期性地支付这一差额的一份合约．一个下限能被用于保护一位贷款者以防止浮动利率太低．也可参见上限.

Floorlet（单期下限）

它对应于下限，正如单期上限对应于上限.

Foreign exchange（外汇）

国际货币市场中，以一国货币表示的另一国货币的价格.

Forward（远期）

一份在未来某一时日以一预定的价格买或卖某种商品的合约，此预定的价格称为远期价格.

Forward rate（远期利率）

借款瞬时利率的远期价格.

Fractal（分形）

一种几何形状，在一小尺度下它看起来与大尺度一样，仅仅尺度较小而已．一根直线是一维分形，而一个 **Brown** 运动的轨道是 1.5 维分形.

Future（期货）

在交易所交易的远期合约.

FX（FX）

汇率的缩写.

Gaussian process（Gauss 过程）

一种过程，它的所有边际分布都是正态分布，且它的所有联合分布都是联合正态的.

Heath-Jarrow-Morton（HJM）（Heath-Jarrow-Morton（HJM 模型））

一种利率市场模型.

Hedge（套期保值，对冲）

为防止市场运动的风险而采取的保护一个头寸的策略.

History（历史）

记录一个过程轨道的信息.

Identically distributed（同分布）

一组随机变量，它们具有相同的概率分布.

IID（IID）

独立同分布的缩写.

Independent（独立）

在一组变量中，它们中没有任何一个与其他变量有联系且产生影响.

Indicator function（示性函数）

一种集合的函数，当变量处于这个集合中，函数值为1；当变量处于这个集合外，函数值为零.

Induction（归纳法）

一种证明方法，当前情况可由前一种情况所确定，而由当前情况又可确定下一种情况，依此类推.

Instantaneous rate（瞬时利率）

一种非常非常短期的贷款的利率.

Instruments（金融工具）

可交易的证券或合约.

Interest rate（利率）

支付利息的比率.

Interest rate market（利率市场）

确定货币时间价值的市场.

Itô's formula（Itô 公式）

微积分中链式‘法则’的随机版本，它用过程自己的波动率和漂移以及函数的导数来表示一个随机过程函数的波动率和漂移. 假如 X_t 有波动率 σ_t 和漂移 μ_t，那么 $Y_t = f(X_t)$ 有波动率 $f'(X_t)\sigma_t$ 和漂移 $f'(X_t)\mu_t + \frac{1}{2}f''(t)\sigma_t^2$.

Kolmogorov's strong law（Kolmogorov 强大数定律）

参见强大数定律.

Law of the unconscious statistician（不严格的统计学家定律）

假如一个随机变量 X 有密度函数 f，那么 $h(X)$ 的数学期望是

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

LIBOR（伦敦银行同业拆借利率）

伦敦所有银行之间所提供的利率. 每天公布的各种货币和到期日利率的集合.

Local martingale（局部鞅）

一类随机过程，它是无漂移的，但没必要是一个鞅.

Log-drift（对数漂移）

随机过程 X_t 取对数所得过程 $\log X_t$ 的漂移.

Log-normal distribution（对数正态分布）

一个随机变量，它的对数是正态分布的.

Log-volatility（对数波动率）

X_t 取对数所得随机变量 $\log X_t$ 的波动率，或等价地 dX_t/X_t 的波动率.

Long（多头）

持有一正的头寸.

Marginal（边际分布）

一个过程 X 在时刻 t 的边际分布是将 X_t 考虑为孤立的随机变量的分布. 两个过程可以是不同的，但仍然可以有相同的边际分布.

Market（市场）

价格信息交换的场所. 通常可以在电子通信网络空间中进行运作.

Market maker（做市商）

（在英联邦）有义务以两种方式报价和交易的经纪商.

market price of risk（风险的市场价格）

根据额外的增长率从风险投资中获得的标准化收益.

Markov（马尔可夫过程）

一类过程，它的未来行为独立于它的过去，仅仅依赖于现在的情况.

Martingale（鞅）

一类过程，它以过去为条件的未来值的数学期望正好是它的当前值. 即对于每一个小于 t 的 s，$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)$ 等于 M_s.

Martingale measure（鞅测度）

一种测度，在这个测度下，一个过程是一个鞅.

Martingale representation theorem（鞅表示定理）

该定理表明，可以将一个鞅写成一个可料过程关于另一个鞅的积分.

Maturity（到期）
一个时间点，在此时刻一份债券将支付它的本金，或更一般地，在此时刻任何权益进行交割清算.
Mean（均值）
数学期望的同义词.
Mean reversion（均值回归）
一个过程的性质，它确保收益有向它的长期平均值回归的倾向.
Measure（测度）
在所有可能发生事件的集合上的概率族，它描写了每一事件发生的可能性大小.
Multi-factor（多因素）
一种市场模型，它由多于一个 **Brown** 运动所驱动.
Newtonian calculus（牛顿微积分）
关于光滑或可微函数的经典微分和积分学.
Newtonian function（牛顿函数）
一类函数，它有足够的光滑性使得它有经典的牛顿导数.
Node（节点）
在一个树上的点，在此新的分叉开始，旧的分叉结束.
Noise（噪声）
波动率的俗语.
Normal distribution（正态分布）
一种连续的分布，由均值 μ 和方差 σ^2 所决定，记为 $N(\mu,\sigma^2)$，其密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Normal distribution function（正态分布函数）
一个正态随机变量的分布函数，记为 $\Phi(x)=\mathbb{P}(N(0,1)\leqslant x)$.
Numeraire（计价单位）
一种基本的证券，其他证券的价值根据它的价值来判定. 经常使用的计价单位是现金债券.
ODE（ODE）
常微分方程的缩写.
Option（期权）
一种合约，它给合约购买者一种在未来时日做某件事情的权力（但并非义务）.
Ornstein-Uhlenbeck（O-U）process（Ornstein-Uhlenbeck（O-U）过程）
一种向均值回归的过程，其随机微分方程形式为

$$dX_t=\sigma dW_t+(\theta-\alpha X_t)\,dt.$$

Over-the-counter（场外交易）

一种直接在交易双方之间交割结算的合约，无需交易中介的参与.

Path probability（轨道概率）

一个树上的过程当通过树上一个特别的轨道的概率. 这个概率是所经过的分支的概率的乘积.

Payoff（偿付）

一种支付.

PDE（PDE）

偏微分方程的缩写.

Poisson（泊松）Poisson process（过程）

一种不连续的随机过程.

Portfolio（资产组合）

持有的证券集合.

Position（头寸）

持有证券的数量，它可以是正的（多头），也可以是负的（空头）.

Previsible（可料过程）

一种随机过程，它是适应的，并且或是连续的或是左连续具有右极限，或是前述这些过程的极限.

Principal（本金）

债券在到期时刻支付的面值.

Probability（概率）

一个事件出现的机会的大小.

Process（过程）

一个以时间为参数的随机变量序列.

Product rule（乘积律）

对两个随机过程进行乘积计算随机微分的结果.

Put-call parity（买入—卖出平价）

"一个买入期权的价值减去具有相同执行价格的卖出期权的价值等于一份远期现值"这个关系的缩写.

Quantos（双重货币工具）

一种交叉货币结算合约，以另一种货币作为结算的衍生证券.

Radon-Nikodym derivative（Radon-Nikodym 导数）

一种测度关于另一种测度的导数，它是每一样本轨道在一种测度下关于另一种测度的相对似然度.

Random variable（随机变量）

一个样本空间的函数.

Random walk（随机徘徊）

由一些独立行走的和构成的离散 Markov 过程．一个简单的对称随机游动是取整数ℕ值、在每一个时间步长以$\frac{1}{2}$概率上升或以$\frac{1}{2}$概率下降的过程．

Recombinant tree（再联接树）

一种树，它的分支能再次走到一起来．

Replicating strategy（复制策略）

一种自融资资产组合交易策略，它正好对一种权益套期保值．

Risk free（无风险）

没有任何亏本的机会．

Risk-neutral measure（风险中性测度）

一种鞅测度．

SDE （SDE）

随机微分方程的缩写．

Security（证券）

代表一种承诺的凭证．

Self-financing（自融资）

一种策略，它永远不需要额外资金的注入，也永远不能够从已有的资金中撤除资金．

Semimartingale（半鞅）

一种过程，它能够分解成一个局部鞅项与一个具有有限变差的漂移项的和．

Share（股份）

（在英联邦）一份股票或股权．

Short（卖空）

（在头寸中）持有一负的或借贷的头寸．

Short rate（短期利率）

参见瞬时利率．

Single-factor（单因素）

一种市场模型，它仅由一种 **Brown** 运动所驱动．

Standard deviation（标准差）

方差的平方根．

Stochastic （随机）

随机（random）的同义词．

Stochastic calculus（随机微积分）

关于随机过程的微积分，而这类过程涉及 **Brown** 运动项．

Stock（股票）

代表对一公司的部分拥有权的证券．

Stock market（股票市场）

交易股票的场所.

Strike price（敲定价格）

在期权交易中，期权的标的资产参照此价格进行买卖.

Strong law（强大数定律）

这个结果表明，在一定技术条件下，n 个独立同分布随机变量样本的平均值，当 n 趋向无穷时将收敛到随机变量分布的均值.

Swaps（互换）

交易双方之间的一种协议，在一段时间内一方向另一方作一系列固定的支付且依赖当前利率从另一方获得相应的支付序列，反之亦然.

Swaption（互换期权）

一种期权，它在未来某一时日进入一掉期合约.

Taylor expansion（Taylor 展开）

对牛顿函数 $f(x)$，其在 x 附近的值用它在 x 的值及其他的各阶导数表示，即

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f'''(x)+\cdots.$$

Term structure（期限结构）

贷款所要求的利率与贷款期限长度之间的关系.

Term variance（期限方差）

在一时间段内，一种证券价格的对数的方差，即 $\mathrm{Var}(\log(S_T/S_0))$.

Term volatility（期限波动率）

在一时间段内，一种资产的有效的（年度的）波动率. 准确地说，它的方差是期限方差除以时间段的长度：

$$\sigma^2=\mathrm{Var}\,(\log(S_T/S_0))/T.$$

Time value of money（货币的时间价值）

在当前的现金流与贴现后的未来现金流之间的差.

Tower law（塔式定律）

这个结果表明，对于 $s<t$，$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X\mid\mathcal{F}_t)\mid\mathcal{F}_s)=\mathbb{E}(X\mid\mathcal{F}_s)$.

Tradable（可交易资产）

一类资产，它要么能够直接交易，要么通过一匹配的资产组合进行间接交易.

Trading strategy（交易策略）

一种连续交易的资产组合选择，这一选择依赖于市场运动.

Transaction cost（交易成本）

买或卖一种证券的费用.

Tree（树）

由节点及连结节点的分支线所组成的图，且支干不包含任何闭的环和圈.

Underlying（标的资产）

一种基本的市场证券，诸如股票、债券和货币.

Vanilla（香草（大众化的）金融产品）

金融产品中一种标准的基础版本.

Variable coupon（可变息票）

一浮动利率合约中的周期性支付.

Variance（方差）

随机变量不确定性的度量. 形式上等于随机变量平方的期望减去随机变量期望的平方，或者等价地，在随机变量和它的均值之间的差的平方的数学期望.

Volatility（波动率）

‘噪声’的量或者一个过程的变化性，更为准确地，一个随机过程 **Brown** 运动项的系数.

Weak law（弱定律）

n 个 IID 随机变量的平均值当 n 增大时越来越不可能显著地不同于随机变量的均值.

Wiener process（Wiener 过程）

Brown 运动的同义词.

With probability 1（以概率 1）

出现的概率为 1 的事件. 这与肯定发生的事件不完全相同. 例如，一正态随机变量可以取值为零，但它将不会以概率 1 取值为零.

Yield（收益率）

由债券提供的平均利率.

Yield curve（收益率曲线）

以债券到期日为横坐标描绘的收益率图形.

Zero coupon（零息票）

直到到期日才支付的债券.

索引(按汉语拼音排序)

索引中页码为英文原书页码，与书中页边标注的页码一致.

O

P

Q

R

S